Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0661.02.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ЮНИТА 2

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Москва 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН 4
ЛИТЕРАТУРА 5
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ 6
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР 9
Глава I. Ряды 9
§1. Числовые ряды 9
§2. Функциональные ряды 15
§3. Степенные ряды 23
§4. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора . . . 33
§5. Свойство единственности 42
§6. Ряды Лорана 48
Глава II. Изолированные особые точки и теория вычетов 59
§7. Классификация изолированных особых точек 59
§8. Вычет функции в изолированной особой точке 73
§9. Вычисление интегралов с помощью вычетов 83
§10. Логарифмические вычеты и принцип аргумента 95
Глава III. Основы операционного исчисления 104
§11. Преобразование Лапласа 105
§12. Основные свойства преобразования Лапласа 115
§13. Применение операционного исчисления к решению обыкновенных дифференциальных уравнений 131
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ 145
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ 151
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ 178
ГЛОССАРИЙ*

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Ряды. Числовые ряды. Функциональные ряды. Степенные ряды. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Свойство единственности. Ряды Лорана.

Изолированные особые точки и теория вычетов. Классификация изолированных особых точек. Вычет функций в особой точке. Основная теорема о вычетах. Логарифмические вычеты и принцип аргумента. Вычисление интегралов с помощью вычетов.

Основы операционного исчисления. Преобразование Лапласа. Основные свойства преобразования Лапласа. Применение операционного исчисления к решению обыкновенных дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. М.: Высшая школа, 1988.

Дополнительная

2. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1965.

3. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.: ГИФМЛ, 1959.

4. Фукс Б.А., Левин В.И. Функции комплексного переменного и их приложения. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.

5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979.

6. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: ГИТТЛ, 1957.

7. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного пременного. М.: Наука, 1987.

8. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории аналитических функций. М.: Наука, 1982.

9. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

10. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

11. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1965.

12. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. М.: Наука, 1985.

13. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981.

14. Осиленкер Б.П. Ряды. Ряды Фурье. М.: СГУ, 2000.

15. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты). М.: Высшая школа, 1983.

Примечание. Все работы использовались при составлении тематического обзора.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умения	Алгоритмы
1	Разложение дробно-рациональной функции в ряд Лорана в окрестности точки z_0.	1. Сделать замену переменной $w = z - z_0$, подставить $z = w + z_0$ в $f(z)$ и получить функцию $g(w) = f(w + z_0)$. 2. Разложить рациональную дробь $g(w)$ в сумму простейших дробей. 3. Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $\lvert q\rvert < 1$, получить разложение функции $g(w)$ в ряд Лорана: $g(w) = \sum_{n=-N}^{-1} c_n w^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$. 4. Сделать обратную замену $w = z - z_0$ и получить разложение функции $f(z)$: $f(z) = \sum_{n=-N}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.
2	Вычисление интегралов по замкнутому контуру с помощью вычетов.	1. Изобразить контур интегрирования на комплексной плоскости. 2. Найти все особые точки функции, попавшие внутрь контура, и исследовать их характер. 3. В каждой из этих особых точек найти вычет функции $f(z)$. 4. Используя основную теорему о вычетах, найти искомый интеграл по формуле: $\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z)$.

№ п/п	Умения	Алгоритмы
3	Вычисление вычетов в бесконечно удаленной точке.	1. Установить, является ли особая точка $z_0 = \infty$ изолированной. Для этого проверить, существует ли окрестность точки $z_0 = \infty$ – внешность окружности $\|z\| = R$, в которой нет других особых точек, кроме $z_0 = \infty$. 2. Сделать замену переменной $w = \frac{1}{z}$, подставить $z = \frac{1}{w}$ в $f(z)$ и получить функцию $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$. 3. Найти коэффициент при w^1 в лорановском разложении функции $g(w)$ по степеням w^n. Этот коэффициент будет коэффициентом c_{-1} при z^{-1} в разложении Лорана функции $f(z)$ по степеням z^n. 4. Найти искомый вычет $res_{\infty} f(z) = -c_{-1}$.
4	Отыскание оригинала преобразования Лапласа по заданному изображению, являющемуся правильной рациональной дробью (дробно-рациональной функцией) методом неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов.	А. *С использованием метода неопределенных коэффициентов.* 1. Разложить дробно-рациональную функцию $F(p)$ в сумму простейших дробей. 2. Для каждой простейшей дроби найти оригинал, используя таблицу соответствия оригиналов и изображений. 3. Используя свойство линейности преобразования Лапласа, найти оригинал заданной рациональной функции-изображения $F(p)$.

№ п/п	Умения	Алгоритмы
		В. *С помощью вычетов.* 1. Найти нули знаменателя дроби $F(p)$, являющиеся полюсами функции $F(p)$. Разложить знаменатель на линейные множители и определить порядки этих полюсов. 2. Найти вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в каждом из полюсов p_k по формуле (8.5) либо (8.6) для полюса первого порядка и по формуле (8.7) для полюса порядка $n>1$. 3. Найти искомый оригинал $f(t)$ по формуле $f(t)=\sum_k res_{p_k}\left(F(p)e^{pt}\right)$.
5	Решение задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.	1. Считая неизвестную функцию $y(t)$ и правую часть $f(t)$ уравнения оригиналами, перейти от данного уравнения, связывающего оригиналы, к операторному уравнению, связывающему их изображения $Y(p)$ и $F(p)$. Для этого воспользоваться теоремой о дифференцировании оригинала и таблицей соответствия. 2. Решить полученное алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения $Y(p)$. 3. Перейти от изображения $Y(p)$ к оригиналу $y(t)$ и получить искомое решение дифференциального уравнения.

ГЛАВА I. РЯДЫ

§1. Числовые ряды

Пусть задана последовательность комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1,2,...$. **Числовым рядом** называется выражение вида:

$$z_1 + z_2 + ... + z_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} z_n . \qquad (1.1)$$

Числа $z_1, z_2, ...$ называются *членами ряда*.

Отметим, что выражение (1.1), вообще говоря, нельзя рассматривать как сумму, поскольку невозможно выполнить сложение бесконечного числа слагаемых. Но если ограничиться конечным числом членов ряда (например, взять первые n членов), то получится обычная сумма, которую можно реально вычислить (каково бы ни было n). Сумма S_n первых n членов ряда называется ***n*-й частичной (частной) суммой ряда** $S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$.

Определение. Ряд (1.1) называется **сходящимся**, если существует конечный предел n-х частичных сумм, т.е. существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Число S называется *суммой ряда*. Если $\lim_{n\to\infty} S_n$ не существует или равен , то ряд (1.1) называется *расходящимся*.

Тот факт, что ряд (1.1) сходится и его сумма равна S, записывается в виде $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$. Эта запись не означает, что были сложены все члены ряда (это сделать невозможно). В то же время, сложив достаточно много членов ряда, можно получить частичные суммы, сколь угодно мало

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

отклоняющиеся от S.

Следующая теорема устанавливает связь между сходимостью ряда с комплексными членами $z_n = x_n + iy_n$ и рядов с действительными членами x_n и y_n.

Теорема 1.1. Для сходимости ряда (1.1) необходимо и достаточно, чтобы сходились два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ с действительными членами. При этом для равенства $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sigma + i\tau$ необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sigma$, $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \tau$.

Доказательство. Введем обозначения для частичных сумм рядов:

$$S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n;\ \sigma_n = x_1 + x_2 + ... + x_n;\ \tau_n = y_1 + y_2 + ... + y_n.$$

Тогда $S_n = \sigma_n + i\tau_n$. Воспользуемся теперь теоремой 4.1 юниты 1: для того, чтобы последовательность $S_n = \sigma_n + i\tau_n$ имела предел $S = \sigma + i\tau$, необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\{\sigma_n\}$ и $\{\tau_n\}$ имели предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = \tau$. Отсюда и следует нужное утверждение, поскольку существование пределов последовательностей $\{S_n\}$, $\{\sigma_n\}$ и $\{\tau_n\}$ равносильно сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ соответственно.

С помощью теоремы 1.1 многие важные свойства и утверждения, справедливые для рядов с действительными членами, сразу переносятся на ряды с комплексными членами. Перечислим некоторые из этих свойств.

1°. **Необходимый признак сходимости.** Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится,

то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. (Обратное утверждение неверно: из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$, не следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится.)

2°. Пусть ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ с комплексными членами сходятся и их суммы равны S и σ соответственно. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n)$ тоже сходится и его сумма равна $S + \sigma$.

3°. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и его сумма равна S. Тогда для любого комплексного числа λ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\lambda z_n)$ тоже сходится и его сумма равна λS.

4°. Если отбросить или добавить к сходящемуся ряду конечное число членов, то получится также сходящийся ряд.

5°. **Критерий сходимости Коши.** Для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число N (зависящее от ε), что при всех $n > N$ и при всех $p \quad 0$ выполнялось неравенство $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon$.

Так же, как и для рядов с действительными членами, вводится понятие абсолютной сходимости.

Определение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n| = |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + \ldots$, составленный из

модулей членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Теорема 1.2. Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ также сходится.

(Другими словами, если ряд сходится абсолютно, то он сходится.)

Доказательство. Поскольку критерий сходимости Коши применим к рядам с произвольными комплексными членами, то он применим, в частности, и к рядам с действительными членами. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сходится, то в силу критерия Коши, примененного к этому ряду, найдется такое число N, что при всех $n > N$ и при всех $p \quad 0$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k| < \varepsilon.$$

В §1 юниты 1 было показано, что $|z+w| \le |z| + |w|$ для любых комплексных чисел z, w; это неравенство легко распространяется на любое конечное число слагаемых. Поэтому

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| = |z_{n+1} + z_{n+2} + \ldots + z_{n+p}| \le |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + \ldots + |z_{n+p}| = \sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k| < \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется число N такое, что при всех $n > N$ и при всех $p \quad 0$ выполнено неравенство $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} z_k\right| < \varepsilon$. Согласно критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится, что и требовалось доказать.

Из курса математического анализа известно (см., например, [14]), что утверждение, обратное теореме 1.2, неверно даже для рядов с действительными членами. А именно, из сходимости ряда не следует его абсолютная сходимость.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ называется **условно сходящимся**, если этот ряд сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, составленный из модулей его членов, расходится.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ является рядом с действительными неотрицательными членами. Поэтому к этому ряду применимы признаки сходимости, известные из курса математического анализа. Напомним без доказательства некоторые из них.

Признаки сравнения. Пусть числа z_n и w_n, начиная с некоторого номера N, удовлетворяют неравенствам $|z_n| \le |w_n|$, $n = N, N+1, \ldots$. Тогда:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ сходится;

2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|$ расходится.

Признак Даламбера. Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = l$. Тогда если $l < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно; если $l > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ расходится. При $l = 1$ признак не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

Радикальный признак Коши. Пусть существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = l$. Тогда если $l < 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится абсолютно; если $l > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ расходится. При $l = 1$ признак не дает ответа на

вопрос о сходимости ряда.

Пример 1.3. Исследовать сходимость ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$.

Решение. а) По определению косинуса (§12 юниты 1) $\cos in=\frac{e^{-n}+e^{n}}{2}>\frac{e^{n}}{2}$. Поэтому $\frac{\cos in}{2^n}>\frac{e^{n}}{2\cdot 2^n}=\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n$.

Применим признак Даламбера к ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n$:

$l=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^{n+1}\Big/\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^{n}=\frac{e}{2}>1$. Значит, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^n$ расходится. По признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos in}{2^n}$ также расходится.

б) Так как $|\cos n|\le 1$, то $\left|\frac{\cos n}{2^n}\right|\le\frac{1}{2^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится. Значит, по признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n}{2^n}\right|$ также сходится. Следовательно, исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$ сходится абсолютно.

Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty}z_k$, полученный из ряда $\sum_{k=1}^{\infty}z_k$ отбрасыванием первых n членов, называется **остатком (n-м остатком)** ряда $\sum_{k=1}^{\infty}z_k$. В случае сходимости так же называется и сумма: $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}z_k$. Легко видеть, что $S=S_n+r_n$. Отсюда сразу следует, что *если ряд сходится, то его n-й остаток*

стремится к нулю при $n \to \infty$. Действительно, пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Тогда $\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = S - S = 0$.

§2. Функциональные ряды

Определение. **Функциональным рядом** называется выражение вида

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \qquad (2.1)$$

где $f_1(z), f_2(z), \ldots$ – функции, определенные в некоторой области D (одной и той же для каждой из функций $f_n(z)$).

Зафиксировав точку $z \in D$, мы получим числовой ряд. Этот ряд может в одних точках сходиться, в других расходиться. Если в точке z ряд сходится (расходится), то z называется *точкой сходимости* (соответственно *точкой расходимости*) ряда. Множество всех точек z из области D, в которых ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится, называется **множеством сходимости функционального ряда**. Для каждой точки z из множества сходимости определена сумма $S(z)$ ряда (2.1). Таким образом, сумма $S(z)$ ряда (2.1) является функцией, определенной на множестве сходимости этого ряда.

Пусть ряд (2.1) сходится во всех точках области D.

Определение. Ряд (2.1) называется **равномерно сходящимся в области** D к функции $S(z)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий от ε, что для всех $n > N$ и всех точек $z \in D$ выполнено неравенство $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$, где $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ – частичная сумма ряда (2.1).

Поясним смысл этого определения. Пусть задано сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$ – допустимое отклонение частичных сумм от суммы $S(z)$, и

пусть ряд (2.1) сходится равномерно. Тогда, сложив достаточно большое число n членов ряда, мы получим частичную сумму $S_n(z)$, которая отклоняется от $S(z)$ не более чем на ε *сразу во всех точках* z *из* D. Это и означает, что приближение суммы $S(z)$ частичными суммами $S_n(z)$ происходит равномерно во всей области D.

Если функциональный ряд сходится в области D, то вовсе не обязательно, что он сходится в D равномерно.

Пример 2.1. Рассмотрим ряд

$$1+z+z^2+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty} z^k, \qquad (2.2)$$

члены которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=z$. По формуле для суммы первых n членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1} z^k=\frac{1-z^n}{1-z}.$$

Если $|z|<1$, то существует предел:

$$S(z)=\lim_{n\to\infty} S_n(z)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{1}{1-z}.$$

Таким образом, ряд (2.2) сходится в круге $|z|<1$, и его сумма $S(z)=\dfrac{1}{1-z}$. Исследуем, будет ли этот ряд сходиться равномерно.

Зафиксируем некоторое $\varepsilon>0$. Если ряд сходится равномерно, то найдется такое N, что при $n>N$ $|S(z)-S_n(z)|<\varepsilon$ для всех z из круга $|z|<1$. Так как

$$|S(z)-S_n(z)|=\left|\frac{1}{1-z}-\frac{1-z^n}{1-z}\right|=\left|\frac{z^n}{1-z}\right|, \qquad (2.3)$$

то должно выполняться неравенство $\left|\frac{z^n}{1-z}\right|<\varepsilon$, $|z|<1$. Но, каково бы ни было значение n, мы можем настолько приблизить точку z к 1, что величина $\left|\frac{z^n}{1-z}\right|$ станет сколь угодно большой и, в частности, превысит ε. Таким образом, ни при каком n неравенство $|S(z)-S_n(z)|<\varepsilon$ не будет выполняться *для всех* z из единичного круга и, следовательно, равномерной сходимости в этом круге нет.

В то же время в любом круге $|z|<r$ радиуса $r<1$ ряд (2.2) будет сходиться равномерно. Это следует из того, что в силу (2.3):

$$|S(z)-S_n(z)|=\left|\frac{z^n}{1-z}\right|\le\frac{|z|^n}{1-|z|}<\frac{r^n}{1-r},\quad |z|<r.$$

Проведите дальнейшее подробное рассуждение самостоятельно.

Теорема 2.2 **(признак равномерной сходимости Вейерштрасса).** Если при $n>N$ члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ удовлетворяют неравенствам $|f_n(z)|\le a_n$ во всех точках z из области D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ сходится в D абсолютно и равномерно.

Доказательство. Абсолютная сходимость ряда (2.1) вытекает из первого признака сравнения (§1). Для доказательства равномерной сходимости возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Так как ряд $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ сходится, то его n-й остаток $r_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$ стремится к нулю при $n\to\infty$ (§1). Поэтому найдется такое K N, что при $n>K$ будет $r_n<\varepsilon$. Используя

неравенства $|f_k(z)| \le a_k$, верные при всех $k > K$, получаем:

$$|S(z) - S_{n_\varepsilon}(z)| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots| \le |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \ldots \le$$

$$\le a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = r_n < \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число K, что для всех $n > K$ и всех точек z из D будет $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$. Это и означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится в D равномерно. Теорема 2.2 доказана.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорирующим рядом* для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Перейдем к изложению основных свойств равномерно сходящихся рядов.

Теорема 2.3. Если члены ряда (2.1) являются функциями, непрерывными в области D, и ряд (2.1) сходится в этой области равномерно, то его сумма $S(z)$ также непрерывна в D.

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и точку z_0 из D. Так как ряд (2.1) сходится в D равномерно, то найдется такое число N, что при всех $n > N$ будет $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon/3$ для любой точки $z \in D$. Зафиксируем одно из таких значений n. Частичная сумма $S_n(z)$ является непрерывной в D функцией, как сумма конечного числа непрерывных функций. Поэтому найдется такое $\delta > 0$, что при $|z - z_0| < \delta$ выполнено неравенство $|S_n(z) - S_n(z_0)| < \varepsilon/3$. Учитывая, что $|S_n(z_0) - S(z_0)| = |S(z_0) - S_n(z_0)| < \varepsilon/3$, получаем

$$|S(z) - S(z_0)| = |(S(z) - S_n(z)) + (S_n(z) - S_n(z_0)) + (S_n(z_0) - S(z_0))| \le$$

$$\le |S(z) - S_n(z)| + |S_n(z) - S_n(z_0)| + |S_n(z_0) - S(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек

z, удовлетворяющих условию $|z-z_0|<\delta$, будет $|S(z)-S(z_0)|<\varepsilon$.

Это и означает, что функция $S(z)$ непрерывна в точке z_0 (см. §5 юниты 1); так как z_0 – любая точка из D, то $S(z)$ непрерывна в D, что и требовалось доказать.

Известно, что конечная сумма непрерывных функций является непрерывной функцией. Теорема 2.3 показывает, что аналогичное свойство сохраняется и для равномерно сходящихся рядов. Можно показать, что если сходимость не равномерная, то это свойство, вообще говоря, не имеет места.

Теперь перенесем на равномерно сходящиеся ряды следующее свойство: интеграл от конечной суммы функций равен сумме интегралов от этих функций.

Теорема 2.4. Если члены ряда (2.1) непрерывны в области D и ряд (2.1) равномерно сходится в этой области к функции $S(z)$, то его можно почленно интегрировать вдоль любой кривой Γ, целиком лежащей в области D, т.е.

$$\int_\Gamma S(z)dz=\int_\Gamma f_1(z)dz+\int_\Gamma f_2(z)dz+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\Gamma f_n(z)dz. \qquad (2.4)$$

Доказательство. По теореме 2.3 функция $S(z)$ непрерывна. Поэтому интеграл $\int_\Gamma S(z)dz$ существует. Докажем равенство (2.4). Пусть

$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\int_\Gamma f_k(z)dz$ – частичная сумма проинтегрированного ряда. Нужно доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=\int_\Gamma S(z)dz$.

Так как интеграл от конечной суммы функций равен сумме интегралов от этих функций, то

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}\int_\Gamma f_k(z)dz=\int_\Gamma\left(\sum_{k=1}^{n}f_k(z)\right)dz=\int_\Gamma S_n(z)dz,$$

где $S_n(z)$ – частичная сумма ряда (2.1). Пусть l – длина кривой Γ.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости ряда (2.1) найдется N такое, что $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon / l$ при $n > N$ и всех z из D. Для таких n имеем

$$\left| \int_\Gamma S(z)dz - \sigma_n \right| = \left| \int_\Gamma S(z)dz - \int_\Gamma S_n(z)dz \right| = \left| \int_\Gamma \big(S(z) - S_n(z)\big)dz \right| \le$$

$$\le \int_\Gamma |S(z) - S_n(z)| \cdot |dz| < \frac{\varepsilon}{l} \int_\Gamma |dz| = \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon$$

(мы воспользовались свойством 4° интеграла из §14 юниты 1). Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, что при $n > N$ выполнено неравенство $\left| \int_\Gamma S(z)dz - \sigma_n \right| < \varepsilon$. По определению предела последовательности получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \int_\Gamma S(z)dz$, а это и означает справедливость равенства (2.4).

Нам понадобится еще одно простое свойство.

Замечание 2.5. Если ряд (2.1) равномерно сходится в области D к функции $S(z)$, а функция $g(z)$ ограничена в D, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g(z) f_n(z)$ равномерно сходится в D к функции $g(z)S(z)$.

Доказательство. Ограниченность функции $g(z)$ означает существование такого числа $M > 0$, что $|g(z)| < M$ для любого $z \in D$. Положим $S_n(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(z)$, $\sigma_n(z) = \sum\limits_{i=1}^{n} g(z) f_i(z)$ – частичные суммы изучаемых рядов. Очевидно, что $\sigma_n(z) = g(z) \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(z) = g(z) S_n(z)$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как ряд (2.1) сходится равномерно, то найдется такое число N, что $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon / M$ при $n > N$ и всех $z \in D$.

Отсюда

$$|g(z)S(z)-\sigma_n(z)| = |g(z)S(z)-g(z)S_n(z)| = |g(z)(S(z)-S_n(z))| =$$

$$= |g(z)|\cdot|S(z)-S_n(z)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

По определению равномерной сходимости получаем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} g(z)f_n(z)$ равномерно сходится к $g(z)S(z)$, что нам и требовалось.

Теоремы 2.2–2.4 и замечание 2.5 справедливы не только для рядов, сходящихся в области, но и для рядов, равномерно сходящихся на кривой. Доказательства в этом случае остаются прежними.

В указанных утверждениях не требуется, чтобы функции $f_n(z)$, составляющие ряд (2.1), являлись аналитическими в области D. Но если, помимо равномерной сходимости ряда (2.1), предположить еще и аналитичность функций $f_n(z)$, то такой ряд будет обладать важными дополнительными свойствами, не имеющими места для равномерно сходящихся рядов из дифференцируемых функций действительного переменного.

Теорема 2.6 **(теорема Вейерштрасса о сумме равномерно сходящегося ряда из аналитических функций).** Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, составленный из аналитических в области D функций $f_n(z)$, равномерно сходится в D. Тогда его сумма $S(z)$ также аналитична в D, причем для любого натурального k ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$, полученный почленным k-кратным дифференцированием исходного ряда, будет сходиться в D к функции $S^{(k)}(z)$ (другими словами, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ можно почленно дифференцировать любое число раз).

Доказательство. Пусть z_0 – произвольная точка из D. Так как область D является открытым множеством (см. §3 юниты 1), то

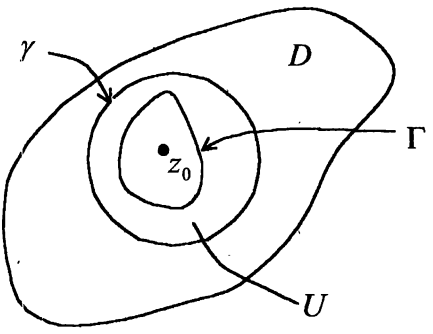


Рис. 1

найдется окрестность U точки z_0 (т.е. некоторый круг с центром в точке z_0), целиком лежащая в D. Возьмем некоторый замкнутый контур Γ, лежащий в U (рис.1). Так как по условию ряд (2.1) сходится равномерно в D, то тем более он сходится равномерно и в U; поскольку функции $f_n(z)$ аналитичны, то они и непрерывны в D и в U. Поэтому применима теорема 2.4, согласно которой

$$\int_\Gamma S(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz .$$

Так как функции $f_n(z)$ аналитичны в U, то по теореме Коши (теорема 15.1 юниты 1) все интегралы в правой части равны нулю. Следовательно, равен нулю и интеграл $\int_\Gamma S(z)dz$. Итак, функция $S(z)$ по теореме 2.3 непрерывна в односвязной области U и интеграл от $S(z)$ по любому замкнутому контуру, лежащему в U, равен нулю. По теореме Морера (теорема 17.6 юниты 1) $S(z)$ является аналитической функцией в U. В частности, $S(z)$ аналитична в точке z_0. Поскольку z_0 выбиралось произвольно, то $S(z)$ будет аналитической функцией во всей области D.

Покажем теперь, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ можно почленно дифференцировать. Обозначим через r радиус круга U, а через γ – его границу, т.е. окружность $|z-z_0|=r$. Рассмотрим функцию

$g(z)=\dfrac{k!}{2\pi i}\dfrac{1}{(z-z_0)^{k+1}}$. При $z\in\gamma$ будет $|g(z)|=\dfrac{k!}{2\pi}\dfrac{1}{|z-z_0|^{k+1}}=\dfrac{k!}{2\pi r^{k+1}}$,

т.е. $g(z)$ является ограниченной на γ. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ равномерно

сходится на γ к функции $S(z)$, то в силу замечания 2.5 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g(z)f_n(z)$

равномерно сходится на γ к функции $g(z)S(z)$, т.е.

$$\frac{k!}{2\pi i}\frac{S(z)}{(z-z_0)^{k+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

В силу равномерной сходимости последнего ряда его можно почленно интегрировать по окружности γ, т.е.

$$\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{S(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f_n(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}. \qquad (2.5)$$

По формуле Коши для производных (см. формулу (17.4) юниты 1)

$$f^{(k)}(z_0)=\frac{k!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}.$$

Применяя эту формулу к каждому из интегралов в (2.5), получим

$$S^{(k)}(z_0)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n^{(k)}(z_0).$$

Поскольку z_0 – произвольная точка области D, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(z_0)$ можно почленно дифференцировать любое число раз в каждой точке z из D, что и требовалось доказать.

§3. Степенные ряды

Степенным рядом называется ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots, \qquad (3.1)$$

где $z_0, c_0, c_1, \ldots$ – заданные комплексные числа, а z – комплексное переменное. Числа $c_0, c_1, \ldots$ называются коэффициентами, а z_0 – центром степенного ряда.

Степенные ряды являются, очевидно, частным случаем функциональных рядов; они играют исключительно важную роль в теории функций. Представление о множестве сходимости степенного ряда дает следующая теорема.

Теорема 3.1 **(теорема Абеля).** 1. Если степенной ряд (3.1) сходится в некоторой точке z_1, $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится при любом z, удовлетворяющем неравенству $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ (т.е. внутри окружности с центром z_0, проходящей через точку z_1) (рис.2).

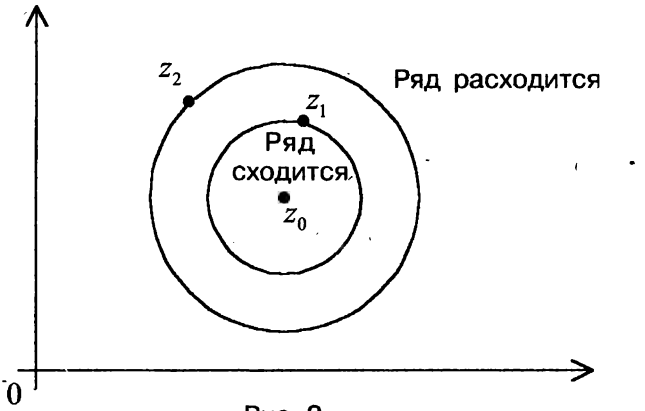


Рис. 2

2. Если ряд (3.1) расходится в некоторой точке z_2, то он расходится при всех z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ (т.е. вне окружности с центром z_0, проходящей через z_2).

Доказательство. 1. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n$ сходится. По необходимому признаку сходимости $\lim_{n\to\infty} c_n (z_1 - z_0)^n = 0$. Поскольку всякая последовательность, имеющая предел, ограничена, то найдется

такое число $M>0$, что $|c_n(z_1-z_0)^n|<M$, $n=0,1,2,...$ Возьмем любую точку z, для которой $|z-z_0|<|z_1-z_0|$, и положим $q=|z-z_0|/|z_1-z_0|$. Очевидно, $0<q<1$, и

$$|c_n(z-z_0)^n|=|c_n(z-z_0)^n|\cdot\left|\frac{z_1-z_0}{z_1-z_0}\right|^n=|c_n(z_1-z_0)^n|\cdot\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|^n<Mq^n$$

(мы воспользовались тем, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей: $|w_1w_2|=|w_1|\cdot|w_2|$).

Итак, $|c_n(z-z_0)^n|<Mq^n$. Поскольку $|q|<1$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}Mq^n$ сходится (его члены образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию). По признаку сравнения (см.§1) ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(z-z_0)|^n$ тоже сходится, и первая часть теоремы доказана.

2. Для доказательства второй части можно было бы провести аналогичное рассуждение. Но мы поступим проще, выведя нужное утверждение из уже доказанного предыдущего. Будем рассуждать от противного. Предположим, что утверждение 2 теоремы неверно, т.е. ряд (3.1) расходится в точке z_2, и при этом найдется точка z', удовлетворяющая неравенству $|z'-z_0|>|z_2-z_0|$, в которой ряд (3.1) сходится. Но если ряд (3.1) сходится в точке z', то в силу первой части теоремы он должен сходиться и в любой точке z, удовлетворяющей неравенству $|z-z_0|<|z'-z_0|$. В частности, он должен сходиться в точке z_2, что противоречит условию. Значит, наше предположение о том, что ряд (3.1) сходится в некоторой точке z', для которой $|z'-z_0|>|z_2-z_0|$, является неверным, т.е. во всех точках, удовлетворяющих указанному неравенству, ряд (3.1) расходится, что и требовалось доказать.

Пользуясь теоремой Абеля, рассмотрим подробнее геометрические свойства множества сходимости степенного ряда. Возьмем некоторый луч, исходящий из точки z_0. Прежде всего отметим, что в самой точке z_0

ряд (3.1) всегда сходится. Действительно, подставляя в (3.1) $z = z_0$, видим, что все члены ряда, начиная со второго, обращаются в нуль. Рассмотрим сходимость ряда в точках луча, отличных от z_0. Возможны три случая.

1. Ряд (3.1) сходится во всех точках луча. Тогда он сходится и во всей плоскости. Действительно, так как ряд сходится в любой точке z_1 луча, сколь угодно далеко отстоящей от z_0, то по теореме Абеля он сходится и внутри окружности сколь угодно большого радиуса с центром в z_0 (см. рис.2). Поэтому ряд будет сходиться во всех точках плоскости.

2. Ряд (3.1) расходится во всех точках луча, отличных от z_0. В этом случае ряд расходится и во всех точках плоскости, кроме точки z_0. Действительно, из расходимости ряда в любой точке $z_2 \quad z_0$ луча, сколь угодно близкой к z_0, следует расходимость ряда и вне окружности сколь угодно малого радиуса с центром в z_0 (см. рис.2). Поэтому любая точка плоскости, кроме точки z_0, будет точкой расходимости ряда.

3. На луче имеются как точки сходимости, отличные от z_0, так и точки расходимости. Из теоремы Абеля следует, что всякая точка сходимости находится ближе к z_0, чем всякая точка расходимости. Поэтому все точки луча разделятся на две группы следующим образом: на промежутке от z_0 до некоторой точки z^* расположатся точки сходимости, а после точки z^* (при движении по лучу от z_0) – точки расходимости. Сама точка z^* может являться как точкой сходимости, так и точкой расходимости. По теореме Абеля ряд (3.1) абсолютно сходится в каждой внутренней точке круга $|z - z_0| < |z^* - z_0|$, ограниченного окружностью с центром z_0, проходящей через точку z^*, и ряд (3.1) расходится в каждой внешней точке этого круга. Круг $|z - z_0| < |z^* - z_0|$ называется **кругом сходимости** степенного ряда (3.1), а радиус этого круга – **радиусом сходимости**. На окружности $|z - z_0| = |z^* - z_0|$ могут располагаться как точки

сходимости, так и точки расходимости.

Понятие круга и радиуса сходимости можно обобщить также и на случаи 1, 2, рассмотренные выше. Если ряд сходится при всех z, то полагают $R =$; тогда круг сходимости совпадает со всей (конечной) комплексной плоскостью. Если ряд сходится только в точке z_0, то полагают $R = 0$; тогда круг сходимости вырождается в точку z_0.

Таким образом, *множеством сходимости степенного ряда (3.1) всегда является внутренность круга с центром в точке z_0 с возможным добавлением некоторых или всех точек на его границе. Этот круг может заполнять всю плоскость или вырождаться в точку z_0.*

Во многих случаях круг и радиус сходимости можно найти, используя признак Даламбера или радикальный признак Коши (см. §1). Применим вначале к ряду (3.1) признак Даламбера в предположении, что соответствующий предел существует:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{c_n(z-z_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(z-z_0)}{c_n}\right| = |z-z_0|\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = l.$$

Определим число R равенством

$$R = 1\Big/\lim_{n\to\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}. \qquad (3.2)$$

Тогда $|z-z_0|/R = l$. По признаку Даламбера при $l<1$ ряд (3.1) сходится, а при $l>1$ расходится. Отсюда следует, что при $|z-z_0|<R$ ряд сходится, а при $|z-z_0|>R$ расходится. Поэтому число R, определенное в (3.2), является радиусом сходимости ряда.

Аналогичное рассуждение и применение радикального признака Коши дают формулу

$$R = 1\Big/\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}. \qquad (3.3)$$

Итак, радиус сходимости степенного ряда можно найти по формулам (3.2), (3.3) при условии, что фигурирующие в них пределы существуют. Но можно и не запоминать эти формулы, а применять указанные признаки непосредственно.

Пример 3.2. Найти круг сходимости ряда

$$1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}. \qquad (3.4)$$

Решение. Применим признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}:\frac{z^n}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\,z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z}{n+1}\right|=0=l$$

для любого z. Значит, $l=0<1$ для каждого $z\in C$. Поэтому ряд (3.4) абсолютно сходится во всей комплексной плоскости C; в этом случае радиус сходимости $R=$.

Пример 3.3. Найти круг сходимости ряда

$$1+z+2!z^2+\ldots+n!z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}n!z^n. \qquad (3.5)$$

Решение. Опять воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!\,z^{n+1}}{n!\,z^n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)|z|=|z|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\begin{cases}0, & \text{если } z=0;\\ \infty, & \text{если } z\neq 0.\end{cases}$$

Таким образом, если $z=0$, то $l=0<1$ и ряд (3.5) сходится; если $z\neq 0$, то $l=\infty>1$ и ряд (3.5) расходится. Следовательно, круг сходимости вырождается в единственную точку $z\neq 0$, а радиус сходимости $R=0$.

Пример 3.4. Найти множество сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{n^2}=(z-2)+\frac{(z-2)^2}{4}+\ldots. \qquad (3.6)$$

Решение. По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-2)^{n+1}}{(n+1)^2}:\frac{(z-2)^n}{n^2}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(z-2)n^2}{(n+1)^2}\right|=|z-2|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2=|z-2|.$$

Значит, при $|z-2|=l<1$ ряд (3.6) абсолютно сходится, а при $|z-2|=l>1$ расходится. Поэтому кругом сходимости является круг

$|z-2|<1$ с центром $z_0=2$ и радиусом $R=1$. Исследуем сходимость на его границе, т.е. на окружности $|z-2|=1$. В точках окружности имеем

$$\left|\frac{(z-2)^n}{n^2}\right|=\frac{|z-2|^n}{n^2}=\frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (см.[14]). Значит, во всех точках границы круга сходимости ряд (3.6) также будет абсолютно сходящимся, и множеством его сходимости является замкнутый круг $|z-2|\le 1$.

Задача. Покажите, что кругом сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(z-2)^n$ также является круг $|z-2|<1$, но при этом в каждой точке окружности $|z-2|=1$ ряд будет расходящимся.

Примеры 3.2–3.4 показывают, что все три случая, разобранные выше (а именно, $R=$, $R=0$ и $0<R<$), могут иметь место.

Отметим основные свойства степенных рядов.

Свойство 3.5. Ряд (3.1) сходится абсолютно и равномерно в любом круге $|z-z_0|<r<R$, лежащем внутри круга сходимости.

Доказательство. Если $|z-z_0|<r<R$, то существует точка z_1 такая, что $r<|z_1-z_0|<R$ (рис.3). Следовательно,

$$\left|c_n(z-z_0)^n\right|<\left|c_n(z_1-z_0)^n\right|.$$

Так как точка z_1 лежит внутри круга сходимости, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\left|c_n(z_1-z_0)^n\right|$ сходится. По теореме 2.2 (признаку Вейерштрасса) ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$

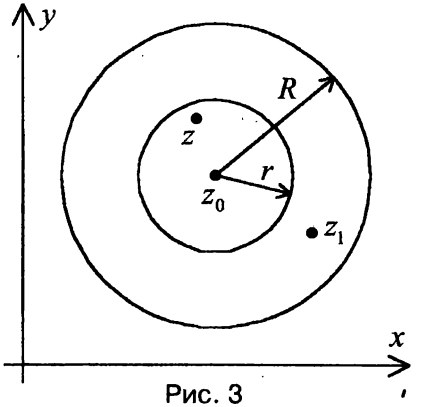


Рис. 3

абсолютно и равномерно сходится в круге $|z-z_0|<r$, что и требовалось доказать.

Свойство 3.6. Сумма $S(z)$ ряда (3.1) внутри круга сходимости является аналитической функцией.

Доказательство. Возьмем произвольную точку z' внутри круга сходимости. Найдется такое число r, что $|z'-z_0|<r<R$. По свойству 3.5 ряд (3.1) равномерно сходится в круге $|z-z_0|<r$; каждый член $c_n(z-z_0)^n$ ряда является аналитической функцией в этом круге (и даже во всей комплексной плоскости C). По теореме 2.6 Вейерштрасса сумма $S(z)$ будет аналитической функцией в круге $|z-z_0|<r$ и, в частности, в точке z'. Тем самым аналитичность функции $S(z)$ в любой внутренней точке круга сходимости установлена.

Свойство 3.7. Степенной ряд

$$S(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\ldots+c_n(z-z_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n \quad (3.7)$$

можно почленно интегрировать внутри круга сходимости, т.е.

$$\int_{z_0}^{z'}S(z)dz=c_0(z'-z_0)+\frac{c_1}{2}(z'-z_0)^2+\frac{c_2}{3}(z'-z_0)^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{c_n}{n+1}(z'-z_0)^{n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z'-z_0)^{n+1}, \quad (3.8)$$

где z' – произвольная точка внутри круга сходимости ряда (3.7). Полученный при этом степенной ряд (3.8) имеет тот же круг сходимости, что и исходный ряд (3.7).

Доказательство. Как и при доказательстве свойства 3.6, выберем число r такое, что $|z'-z_0|<r<R$. Ряд (3.7) равномерно сходится в круге $|z-z_0|<r$, его члены являются непрерывными (и даже аналитическими) функциями в этом круге. Поэтому возможность почленного интегрирования и равенство (3.8) следуют из теоремы 2.4 и равенства (2.4); в качестве кривой Γ в (2.4) можно выбрать любую

кривую, идущую из z_0 в z' внутри круга $|z'-z_0|<r$, например отрезок $[z_0, z']$. Так как степенной ряд (3.8) сходится в любой точке z', лежащей внутри круга сходимости ряда (3.7), то радиус сходимости R_1 ряда (3.8) не может быть меньше радиуса сходимости R ряда (3.7), т.е. $R_1 \quad R$. Покажем, что на самом деле $R_1 = R$. Предположим противное, т.е. $R_1 > R$. Возьмем число R' такое, что $R < R' < R_1$. По свойству 3.5 ряд (3.8) равномерно сходится в круге $|z-z_0|<R'$. Так как этот ряд составлен из аналитических функций, то, согласно теореме 2.6 Вейерштрасса, его можно почленно дифференцировать в круге $|z-z_0|<R'$. Значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z'-z_0)^n$, полученный почленным дифференцированием ряда (3.8), будет сходиться в круге $|z-z_0|<R'$. Поскольку $R<R'$, то сходимость будет и в некоторых точках z', лежащих вне круга $|z-z_0|<R$. Но это противоречит тому, что $|z-z_0|<R$ – круг сходимости ряда (3.7). Итак, $R_1 = R$, что и требовалось доказать.

Свойство 3.8. Степенной ряд (3.7) можно почленно дифференцировать внутри круга сходимости любое число раз:

$$S'(z) = c_1 + 2c_2(z-z_0) + 3c_3(z-z_0)^2 + \ldots + nc_n(z-z_0)^{n-1} + \ldots \qquad (3.9)$$

$$S''(z) = 2c_2 + 3\cdot 2\cdot c_3(z-z_0) + \ldots + n(n-1)c_n(z-z_0)^{n-2} + \ldots \qquad (3.10)$$

. . . . . .

$$S^{(n)}(z) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 1\cdot c_n + (n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot c_{n+1}(z-z_0) + \ldots \qquad (3.11)$$

Полученные при дифференцировании ряды (3.9)–(3.11) имеют тот же круг сходимости, что и исходный ряд (3.7).

Доказательство. Пусть z' – произвольная точка круга сходимости $|z-z_0|<R$. Опять возьмем число r такое, что $|z'-z_0|<r<R$. Поскольку ряд (3.7) составлен из аналитических функций

и равномерно сходится в круге $|z-z_0|<r$, то по теореме Вейерштрасса его можно почленно дифференцировать в этом круге (а следовательно, и в точке z') любое число раз. Таким образом, ряды (3.9)–(3.11) будут сходиться в любой точке круга сходимости ряда (3.7) к соответствующим производным функции $S(z)$. Значит, радиусы сходимости рядов (3.9)–(3.11) не меньше, чем R. Докажем вначале, что радиус сходимости R_1 ряда (3.9) равен R. Пусть это неверно, т.е. $R_1 > R$. Проинтегрировав этот ряд внутри круга $|z-z_0|<R_1$, мы получим исходный ряд (3.7) (кроме первого члена c_0, отбрасывание которого не влияет на сходимость ряда). По свойству 3.7 проинтегрированный ряд имеет тот же круг сходимости $|z-z_0|<R_1$. Значит, ряд (3.7) имеет радиус сходимости $R_1 > R$, что противоречит условию. Итак, $R_1 = R$, т.е. при однократном дифференцировании радиус и круг сходимости сохраняются. Но ряд (3.10) получается дифференцированием ряда (3.9). Значит, его радиус сходимости также равен R, и так далее.

Замечание. Хотя круг и радиус сходимости степенного ряда остаются неизменными при почленном интегрировании и дифференцировании ряда, сходимость (или расходимость) в граничных точках круга при этих операциях может не сохраняться.

Свойства 3.7 и 3.8 позволяют иногда найти сумму ряда.

Пример 3.9. Найти сумму ряда $S(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^n$.

Решение. Воспользуемся равенством

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},\quad |z|<1$$

(см. пример 2.1). Дифференцируя этот ряд почленно, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^{n-1} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Осталось домножить левую и правую части равенства на z:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = \frac{z}{(1-z)^2}, \text{ т.е. } S(z) = \frac{z}{(1-z)^2}, \ |z|<1.$$

Задача. Применяя почленное интегрирование, найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ и укажите круг сходимости этого ряда.

§4. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора

Будем говорить, что функция $f(z)$ разлагается в области U в степенной ряд, если эту функцию можно представить в виде суммы степенного ряда, сходящегося в каждой точке области U; другими словами, можно подобрать числа $z_0, c_0, c_1, c_2, \ldots$ такие, что

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n. \qquad (4.1)$$

Следующая теорема позволяет находить коэффициенты разложения (4.1) при условии, что такое разложение существует.

Теорема 4.1 **(теорема единственности разложения функции в степенной ряд).** Пусть в некотором круге $U = \{z : |z-z_0| < R\}$ функция $f(z)$ разлагается в степенной ряд. Тогда $f(z)$ является аналитической в U функцией, а коэффициенты $c_0, c_1, \ldots$ разложения определяются однозначно по формулам:

$$c_0 = f(z_0); \ c_1 = f'(z_0); \ c_2 = \frac{f'(z_0)}{2!}; \ \ldots; \ c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}; \ \ldots. \qquad (4.2)$$

Доказательство. По условию теоремы ряд (4.1) сходится в U и его сумма $S(z) = f(z)$. Поэтому аналитичность функции $f(z)$ сразу следует из свойства 3.6. Чтобы получить первое равенство в (4.2), положим в (4.1) $z = z_0$. Тогда все слагаемые, начиная со второго, обратятся в нуль, и мы придем к равенству $f(z_0) = c_0$, которое нам и требовалось. Для вывода остальных формул в (4.2) воспользуемся свойством 3.8 и формулами (3.9)–(3.11). Подставляя в эти формулы

$S(z)=f(z)$ и $z=z_0$, получим:

$$f'(z_0)=c_1;\ f''(z_0)=2c_2;\ ...;\ f^{(n)}(z_0)=n(n-1)(n-2)\cdot...\cdot1\cdot c_n=n!c_n$$

(остальные слагаемые в формулах (3.9)–(3.11) будут содержать множитель (z_0-z_0) и поэтому обратятся в нуль). Из полученных равенств сразу следуют формулы (4.2), и теорема 4.1 доказана.

Если положить $f^{(0)}(z_0)=f(z_0)$ и $0!=1$, то все равенства (4.2) можно записать единообразно:

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n=0,1,2,.... \tag{4.3}$$

Формулы (4.2), (4.3) называются *формулами Тейлора*. Степенной ряд (4.1), коэффициенты которого определяются по формулам Тейлора (4.3), называется **рядом Тейлора функции** $f(z)$. Подставляя равенства (4.2), (4.3) в (4.1), получим:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+...=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \tag{4.4}$$

Теорема 4.1 показывает, что если $f(z)$ можно разложить в степенной ряд в некоторой окрестности U точки z_0, то это разложение будет рядом Тейлора (4.4) и никаким другим. При этом $f(z)$ должна быть аналитической в U. Следующая фундаментальная теорема утверждает, что для всякой аналитической функции $f(z)$ такое разложение возможно.

Теорема 4.2 **(о существовании разложения аналитической функции в степенной ряд).** Пусть функция $f(z)$ аналитична в области D и z_0 – произвольная точка из D. Тогда в любом круге $U=\{|z-z_0|<R\}$, принадлежащем области D, эту функцию можно представить в виде суммы сходящегося степенного ряда Тейлора (4.4).

Доказательство. Возьмем в круге U произвольную точку z и выберем число r так, чтобы $|z-z_0|<r<R$ (рис.4). Обозначим через Γ окружность $|\xi-z_0|=r$. По интегральной формуле Коши (см. юниту 1, §17)

имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}. \quad (4.5)$$

Чтобы получить разложение функции $f(z)$ в степенной ряд, разложим вначале в ряд функцию $\frac{1}{\xi-z}$. Напомним, что при $|q|<1$

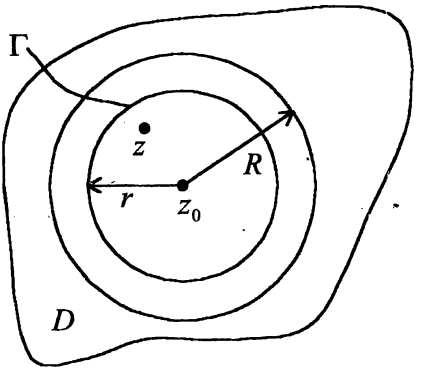


Рис. 4

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}. \quad (4.6)$$

Это равенство следует из формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а также было получено в примере 2.1. Имеем

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}.$$

Положим $q=\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}$. Так как $|z-z_0|<|\xi-z_0|$, то $|q|<1$. Поэтому применима формула (4.6), которая дает

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}. \quad (4.7)$$

Для фиксированных точек z и z_0 и произвольной точки $\xi\in\Gamma$

$$\left|\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right|=\frac{|z-z_0|^n}{r^{n+1}}=\frac{1}{r}\left(\frac{|z-z_0|}{r}\right)^n=a_n. \quad (4.8)$$

Заметим, что числа a_n не зависят от ξ и $\dfrac{|z-z_0|}{r}=|q|<1$. Значит, числа a_n образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

и, следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится. Поскольку равенства (4.8) выполнены для всех точек $\xi \in \Gamma$, то в силу признака равномерной сходимости Вейерштрасса (теорема 2.2) ряд (4.7) сходится на Γ абсолютно и равномерно по переменной ξ (мы уже отмечали, что теоремы 2.2–2.4 и замечание 2.5 справедливы не только для рядов, сходящихся в области, но и для рядов, сходящихся на кривой).

Домножим обе части равенства (4.7) на функцию $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$, ограниченную на Γ; согласно замечанию 2.5, равномерная сходимость ряда (4.7) при этом не нарушится:

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\frac{f(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

Воспользуемся теперь теоремой 2.4, в силу которой получившийся ряд можно почленно интегрировать на Γ по переменной ξ. Интегрирование и формула (4.5) дают:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)(z-z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \quad (4.9)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0,1,2,... \quad (4.10)$$

(мы воспользовались тем, что множители $(z-z_0)^n$ не зависят от ξ и их можно вынести за знаки интегралов). Таким образом, возможность разложения функции $f(z)$ в степенной ряд установлена. По теореме 4.1 это разложение единственно, т.е. степенной ряд является рядом Тейлора функции $f(z)$. Теорема 4.2 доказана.

***Замечания*: 1.** Тот факт, что полученное разложение (4.9) функции $f(z)$ является рядом Тейлора, можно было обосновать и без ссылки на теорему 4.1. Действительно, коэффициенты c_n этого разложения определяются равенствами (4.10). По формулам Коши для производных

(см. формулы (17.4) юниты 1)

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}},\quad n=1,2,...$$

(это равенство справедливо и при $n=0$, поскольку обращается в интегральную формулу Коши (4.5)). Отсюда и из (4.10) получаем $c_n=f^{(n)}(z_0)/n!$; таким образом, ряд (4.9) является рядом Тейлора функции $f(z)$.

2. Из теоремы 4.2 следует, что радиус сходимости ряда Тейлора (4.4) равен расстоянию от центра z_0 до ближайшей к нему особой точки функции $f(z)$ (напомним, что особыми называются точки, в которых $f(z)$ не является аналитической). Действительно, пусть z^* – ближайшая к z_0 особая точка и $R=|z^*-z_0|$. Тогда функция $f(z)$ будет аналитической в круге $U=\{|z-z_0|<R\}$ и, согласно теореме 4.2, ее ряд Тейлора сходится в U. Поэтому радиус сходимости ряда (4.4) не может быть меньше R. Но он не может быть и больше R: в противном случае z^* была бы внутренней точкой круга сходимости степенного ряда и, следовательно, сумма $f(z)$ этого ряда являлась бы аналитической функцией в z^*, что противоречит условию.

3. Согласно теоремам 4.1 и 4.2, функция $f(z)$ является аналитической в области D тогда и только тогда, когда в окрестности каждой точки $z_0\in D$ ее можно представить в виде суммы степенного ряда. Тем самым мы доказали эквивалентность определения аналитичности, данного в §6 юниты 1, и следующего классического определения: однозначная функция $f(z)$ называется аналитической в D, если в окрестности каждой точки $z_0\in D$ ее можно разложить в ряд по степеням $z-z_0$.

Формулы (4.3) Тейлора и формулы для производных $(e^z)'=e^z$, $(\sin z)'=\cos z$, $(\cos z)'=-\sin z$, выведенные в §§ 11, 12 юниты 1,

позволяют легко получить тейлоровские разложения функций e^z, $\sin z$ и $\cos z$, аналогичные разложениям соответствующих функций действительного переменного:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad (4.11)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad (4.12)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (4.13)$$

(здесь $z_0 = 0$). Ряды (4.11)–(4.13) сходятся во всей комплексной плоскости C. Этот факт можно проверить непосредственно по признаку Даламбера (см. пример 3.2, в котором рассмотрен ряд (4.11)), а можно вывести из теоремы 4.2. Действительно, поскольку функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ аналитичны во всей комплексной плоскости (этот факт был установлен в §§ 11, 12 юниты 1), то по теореме 4.2 указанные ряды будут сходиться в любом (сколь угодно большом) круге $|z| < R$, а значит, и во всей плоскости C; радиус сходимости здесь равен .

4. Формулы (4.11)–(4.13) можно принять в качестве определения функций e^z, $\sin z$, $\cos z$. В этом случае формула Эйлера $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ и равенства $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, ранее служившие определениями, теперь будут следствиями формул (4.11)–(4.13). Покажем, например, как получается формула Эйлера. Умножим ряд (4.12) на i и сложим с рядом (4.13), располагая члены полученного при этом ряда в порядке возрастания степеней:

$$\cos z + i \sin z = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \frac{iz^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$=1+(iz)+\frac{(iz)^2}{2}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!}+\frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=e^{iz},$$

что и требовалось доказать (мы воспользовались тем, что $(i)^{2n}=(i^2)^n=(-1)^n$).

Отметим также разложение в ряд Тейлора функции $f(z)=\frac{1}{1+z}$, $z_0=0$:

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n. \qquad (4.14)$$

Получить его можно либо используя формулу (4.6) для суммы геометрической прогрессии (здесь $q=-z$), либо непосредственно по формулам (4.3). Данная функция имеет единственную особую точку $z^*=-1$. Поскольку расстояние от точки $z_0=0$ до z^* равно 1, то радиус сходимости $R=1$ (см. замечание 2); доказать этот факт можно и по признаку Даламбера. Кругом сходимости будет круг $|z|<1$.

Формулы (4.11)–(4.14) позволяют получать разложения в ряд Тейлора и многих других функций. Полезными при этом часто оказываются следующие приемы: а) метод подстановки; б) почленное интегрирование или дифференцирование рядов.

Пример 4.3. Найти разложение функции $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ в степенной ряд с центром $z_0=0$.

Решение. Равенство (4.14) справедливо при любом z, для которого $|z|<1$. Поэтому мы можем подставить в него z^2 вместо z при условии, что $|z^2|<1$:

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-\ldots+(-1)^n z^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}. \qquad (4.15)$$

Так как условие $|z^2|<1$ равносильно тому, что $|z|<1$, то $R=1$.

На примере ряда (4.15) покажем, насколько важно распространение функций с действительной оси в комплексную плоскость для анализа поведения степенных рядов действительного переменного. Из (4.15) следует, что разложение функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ в ряд по степеням x^n имеет вид:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\ldots+(-1)^n x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Этот ряд сходится в интервале $(-1,1)$ и расходится при $|x|>1$. Причину этого нельзя понять, рассматривая только точки оси Ox: ведь функция $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ "одинаково хороша" во всех точках действительной оси, и точки ± 1, разделяющие интервалы сходимости и расходимости, ничем не примечательны для этой функции. Но выход в комплексную плоскость сразу разъясняет явление: функция $f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ имеет особые точки $z^*=\pm i$, расстояние от которых до точки $z_0=0$ равно 1. Поэтому и радиус сходимости $R=1$.

Пример 4.4. Разложить функцию $f(z)=\ln(1+z)$ по степеням z и найти круг сходимости.

Р е ш е н и е. Напомним, что главная ветвь логарифма определяется формулой $\ln w=\ln|w|+i\arg w$, и $(\ln w)'=\dfrac{1}{w}$ (см. §11 юниты 1). Поэтому $f(z)=\ln(1+z)$ является первообразной функции $\dfrac{1}{1+z}$, причем $f(0)=\ln 1=0$. Функция $\ln(1+z)$ имеет единственную особую точку $z^*=-1$ и, следовательно, аналитична в круге $|z|<1$. Значит,

$$\int_0^z \frac{1}{1+\xi}d\xi=\ln(1+z)+C,\quad |z|<1.$$

Подставляя в это равенство $z=0$, получим $0=0+C$, т.е. $C=0$. Так как ряд (4.14) сходится в круге $|z|<1$, то его можно проинтегрировать в этом круге:

$$\ln(1+z)=\int_0^z \frac{1}{1+\xi}d\xi = z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

Удобно начинать суммирование с индекса $k=1$, сделав замену $k=n+1$:

$$\ln(1+z)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{z^k}{k}. \qquad (4.16)$$

Круг сходимости проинтегрированного ряда (4.16) будет тот же, что и у исходного ряда (4.14), т.е. $|z|<1$.

Пример 4.5. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z-3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=1$ и найти круг сходимости.

Р е ш е н и е. Сделаем замену переменной: $z-z_0=w$, т.е. $w=z-1$, $z=w+1$. Тогда $\dfrac{1}{z-3}=\dfrac{1}{w+1-3}=\dfrac{1}{w-2}$. Чтобы воспользоваться формулой (4.14), вынесем в знаменателе за скобки множитель –2: $\dfrac{1}{w-2}=\dfrac{1}{-2(1-w/2)}$. Подставляя в (4.14) $-w/2$ вместо z, получим:

$$\frac{1}{w-2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-w/2}=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{w}{2}+\frac{w^2}{4}+\ldots+\frac{w^n}{2^n}+\ldots\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^{n+1}}.$$

Так как ряд (4.14) сходится при $|z|<1$, то полученный ряд сходится при $|-w/2|<1$ или при $|w|<2$. Возвращаясь к переменной z, подставим

$w = z - 1$: $\dfrac{1}{z-3} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{2^{n+1}}$, и искомое разложение получено, причем ряд сходится при $|z-1| < 2$. Заметим, что круг сходимости можно было определить и из других соображений: функция $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$ имеет единственную особую точку $z^* = 3$, расстояние от которой до центра ряда $z_0 = 1$ равно 2. Поэтому радиус сходимости $R = 2$, и круг сходимости есть $|z-1| < 2$.

§5. Свойство единственности

Точка z_0 называется *нулем* функции $f(z)$, если $f(z_0) = 0$. Предположим, что функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности U точки z_0, $f(z_0) = 0$ и $f(z)$ не обращается в нуль тождественно в этой окрестности. В U функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора. Так как $f(z_0) = 0$, то коэффициент c_0 тейлоровского разложения (4.1) функции $f(z)$ равен нулю (см. (4.2)). Поскольку $f(z)$ не равна нулю тождественно в U, то среди остальных коэффициентов найдется хотя бы один ненулевой. Номер n первого отличного от нуля коэффициента c_n называется **кратностью** (или **порядком**) **нуля** z_0. При этом разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид:

$$f(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \qquad (5.1)$$

где $c_n \neq 0$ и $n \geq 1$. Из (4.2) следует, что порядок нуля z_0 равен порядку младшей отличной от нуля производной $f^{(n)}(z_0)$. Если $n = 1$, то нуль z_0 называется *простым*.

Разложение (5.1) можно переписать в виде:

$$f(z)=(z-z_0)^n(c_n+c_{n+1}(z-z_0)+...)=(z-z_0)^n\varphi(z), \qquad (5.2)$$

где $\varphi(z)=c_n+c_{n+1}(z-z_0)+...$, причем $\varphi(z_0)=c_n\neq 0$.

Пример 5.1. Найти нули функции $f(z)=(z^2-4)^3e^z$ и указать их порядок.

Решение. Уравнение $f(z)=0$ равносильно тому, что $z^2-4=0$ или $z=\pm 2$. Представим $f(z)$ в виде $f(z)=(z-2)^3(z+2)^3e^z$. Пусть $z_0=2$. Положим $\varphi(z)=(z+2)^3e^z$. Тогда $f(z)=(z-2)^3\varphi(z)$, причем $\varphi(2)=4^3e^2\neq 0$. Поэтому $z_0=2$ – нуль порядка 3. Если же $z_0=-2$, то возьмем $\varphi(z)=(z-2)^3e^z$. Из равенства $f(z)=(z+2)^3\varphi(z)$, в котором $\varphi(-2)\neq 0$, следует, что $z_0=-2$ – также нуль порядка 3.

Теорема 5.2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности U точки z_0, $f(z_0)=0$ и $f(z)$ не равна нулю тождественно в U. Тогда существует окрестность точки z_0, в которой $f(z)$ не имеет других нулей, кроме z_0.

Доказательство. Пусть z_0 – нуль порядка n. Тогда справедливо равенство (5.2). Функция $\varphi(z)$ является аналитической, а значит и непрерывной в U, причем $\varphi(z_0)\neq 0$. Поэтому найдется такая окрестность (возможно, меньшая) точки z_0, в которой $\varphi(z)\neq 0$. Так как множитель $(z-z_0)^n$ обращается в нуль только в точке z_0, то в указанной окрестности функция $f(z)=(z-z_0)^n\varphi(z)$ также обращается в нуль лишь при $z=z_0$, что и требовалось доказать.

Точка z_0 называется *изолированным нулем* функции $f(z)$, если найдется такая окрестность точки z_0, в которой $f(z)$ не имеет нулей, отличных от z_0. Теорема 5.2 утверждает, что аналитическая функция, не

равная тождественно нулю, может иметь только изолированные нули. Выведем отсюда следующую важную теорему.

Теорема 5.3 **(теорема единственности аналитической функции).** Если две аналитические в области D функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают на некоторой бесконечной последовательности попарно различных точек $z_1, z_2, \ldots$, сходящихся к точке $a \in D$, то $f_1(z) = f_2(z)$ всюду в области D.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. Она аналитична, а значит, и непрерывна в D, и $f(z_n) = 0$, $n = 1,2,\ldots$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ и $f(z)$ непрерывна в a, то $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Поэтому a – тоже нуль функции $f(z)$, причем нуль не изолированный, так как в любой окрестности точки a найдется бесконечно много других нулей z_n.

Возьмем произвольную окрестность U точки a, лежащую в D. Тогда функция $f(z)$ аналитична в U. Предположим, что в U $f(z)$ не обращается в нуль тождественно. Тогда по теореме 5.2 точка a должна быть изолированным нулем, и мы придем к противоречию. Следовательно, $f(z)$ тождественно равна нулю в любой окрестности точки a, лежащей в D. Докажем, что $f(z)$ равна нулю во всех точках области D. Пусть b – произвольная точка области D. Соединим точки a и b непрерывной кривой Γ, лежащей внутри D. Пусть ρ – кратчайшее расстояние от точек кривой Γ до границы области D. Возьмем некоторое положительное число $\delta < \rho$ (например, $\delta = \rho/2$). На кривой Γ выберем точки $z_0, z_1, \ldots, z_n$ так, чтобы $z_0 = a, z_n = b$ и расстояние между каждыми двумя соседними точками было меньше δ. Для каждой точки z_k построим круг U_k с центром z_k и радиусом δ (рис.5). Поскольку $\delta < \rho$, то все эти круги будут целиком лежать в D. Так как U_0 является окрестностью точки $a = z_0$, то $f(z) = 0$ (т.е. тождественно равна нулю) в U_0. По построению расстояния между

точками z_0 и z_1 меньше δ. Поэтому z_1 лежит внутри круга U_0; значит, и некоторая (малая) окрестность точки z_1 лежит в U_0. В этой окрестности $f(z) \equiv 0$, и, следовательно, z_1 не является изолированным нулем функции $f(z)$. Так как $f(z)$ аналитична в окрестности U_1 точки z_1, то $f(z) \quad 0$ в U_1 (в противном случае, согласно теореме 5.2, нуль z_1 был бы изолированным). Переходя теперь от круга U_1 к U_2 и проводя аналогичное рассуждение, мы получим, что $f(z) \equiv 0$ в U_2. Двигаясь по цепочке кругов, мы доберемся до U_n и покажем, что $f(z) \equiv 0$ в U_n. В частности, $f(b) = 0$. Таким образом, $f(z) = f_1(z) - f_2(z) = 0$ во всех точках из D. Следовательно, $f_1(z) = f_2(z)$ всюду в области D, что и требовалось доказать.

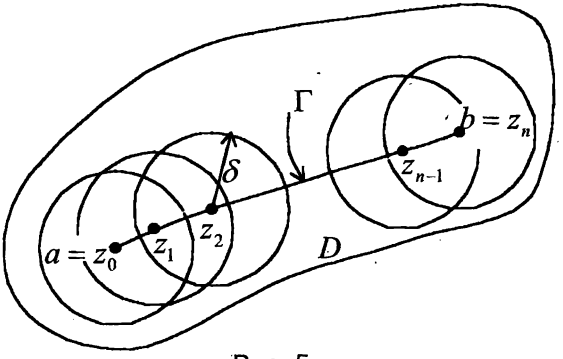


Рис. 5

Теорема 5.3 показывает существенное отличие дифференцируемости функций комплексного переменного от дифференцируемости функций действительного переменного. В самом деле, две даже бесконечно дифференцируемые функции действительного переменного могут совпадать на части области определения, не совпадая тождественно. Например, функции $f_1(x) = 1$ при $x \in (-1;1)$ и $f_2(x) = 1$ при $x \in (-1;0]$, $f_2(x) = 1 + e^{-1/x}$ при $x \in (0,1)$ (рис.6) бесконечно дифференцируемы, совпадают при $x \in (-1;0]$, но $f_1(x) \;/\; f_2(x)$ на $(-1;1)$. В то же время, согласно доказанной теореме 5.3, если две аналитические

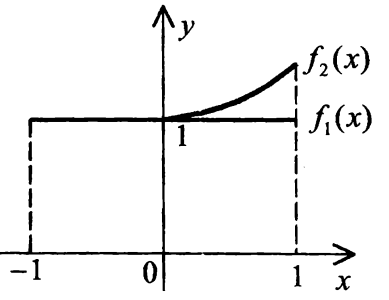


Рис. 6

в D (т.е. дифференцируемые всюду в D) функции совпадают на множестве, содержащем последовательность точек, сходящихся к точке $a \in D$ (например, совпадают на маленьком кружке или на дуге, принадлежащей области D), то эти функции совпадают во всей области D.

Выведем из теоремы 5.3 еще одно важное свойство аналитических функций.

Теорема 5.4 **(принцип максимума модуля).** Пусть функция $f(z)$ аналитична в ограниченной области D, непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и не является постоянной. Тогда максимум модуля $|f(z)|$ функции $f(z)$ в замкнутой области $\overline{D}$ достигается только на границе области D.

Доказательство. Функция $|f(z)|$ непрерывна в замкнутой ограниченной области $\overline{D}$ и, следовательно, принимает свое наибольшее значение M в некоторой точке $z_0 \in \overline{D}$. Надо доказать, что z_0 не может быть внутренней точкой области D. Пусть это неверно, т.е. $z_0 \in D$ и $|f(z_0)| = M$. Докажем, что тогда и в любой окрестности U точки z_0, целиком лежащей в D, $|f(z)| = M$. Пусть $|z - z_0| = R$ – окружность настолько малого радиуса R, что замкнутый круг $|z - z_0| \le R$ целиком лежит в D. По теореме о среднем (см. теорему 17.3 юниты 1)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R\, e^{i\varphi}) d\varphi .$$

Отсюда следует, что

$$M = |f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R\, e^{i\varphi}) d\varphi . \qquad (5.3)$$

Если найдется такое φ_0, что $|f(z_0 + R\, e^{i\varphi_0})| < M$, то в силу непрерывности функции $f(z)$ найдется также интервал $(\varphi_0 - \delta; \varphi_0 + \delta)$,

на котором $\left|f(z_0+R\,e^{i\varphi})\right|<M$. Поскольку в остальных точках отрезка $[0;2\pi]$ выполнено неравенство $\left|f(z_0+R\,e^{i\varphi})\right|\le M$ (т.к. M – наибольшее значение $\left|f(z)\right|$ в D), то тогда правая часть (5.3) будет строго меньше M, что противоречит равенству в (5.3) (получится $M<M$). Значит, для всех $\varphi\in[0;2\pi]$ будет $\left|f(z_0+R\,e^{i\varphi})\right|=M$. Так как R – произвольное достаточно малое число, то и во всей окрестности U точки z_0 $\left|f(z)\right|=M$. Покажем теперь, что не только $\left|f(z)\right|$, но и сама функция $f(z)$ является постоянной в U. Тем самым теорема будет доказана. Действительно, если $f(z)$ c в U, то по теореме 5.3 $f(z)$ c во всей области D, что противоречит условию о том, что $f(z)$ не является постоянной. Таким образом, предположив, что z_0 – внутренняя точка области D, мы придем к противоречию.

Если $M=0$, то равенство $\left|f(z)\right|=0$ равносильно тому, что $f(z)=0$ в U, что нам и требовалось. Рассмотрим теперь случай $M>0$. Так как $f(z_0)\neq 0$, то в некоторой окрестности точки z_0 можно выделить регулярную ветвь $\varphi(z)$ многозначной функции $\ln f(z)$ (о регулярных ветвях логарифма см. §11 юниты 1). Для действительной части функции $\varphi(z)$ имеем $\operatorname{Re}\varphi(z)=\ln\left|f(z)\right|=\ln M$. Поэтому функция $u(z)=\operatorname{Re}\varphi(z)$ является постоянной в некоторой окрестности точки z_0. Используя условия Коши-Римана

$$\frac{u}{\partial x}=\frac{v}{\partial y},\quad \frac{u}{\partial y}=-\frac{v}{\partial x},$$

получим, что мнимая часть $v(z)$ функции $\varphi(z)$ также постоянна. Поэтому $\varphi(z)\equiv c_1$. Так как $f(z)=e^{\varphi(z)}$, то $f(z)\equiv e^{c_1}=c$, т.е. $f(z)$ тождественно равна постоянной в некоторой окрестности точки z_0. Теорема 5.4 доказана.

Замечания: **1.** Теорему 5.4 легко вывести из теоремы 5.3 и следующего принципа сохранения области: если функция $f(z)$ аналитична в области D и отлична от постоянной, то множество D', на которое она отображает D, также является областью (т.е. открытым связным множеством). Попробуйте доказать теорему 5.4 таким способом самостоятельно. Мы приводим более сложное рассуждение, потому что указанный принцип сохранения области был сформулирован в §13 юниты 1 без доказательства.

2. Теорему 5.4 можно сформулировать в следующем эквивалентном виде: если функция $f(z)$ аналитична в области D и ее модуль $|f(z)|$ достигает максимума (локального) в некоторой точке $z_0 \in D$, то $f(z)$ постоянна.

§6. Ряды Лорана

Здесь мы рассмотрим разложения в ряды более широкого класса функций, чем рассматривали прежде. А именно, будем изучать такие функции, которые аналитичны не во всем круге $|z-z_0|<R$, а лишь в кольце $r<|z-z_0|<R$. В частности, очень важным будет случай $r=0$, т.е. разложение функции в проколотой окрестности точки z_0. Эти разложения позволяют изучать функции в окрестности точек, где они теряют аналитичность (особых точек).

Заметим, что степенных рядов (4.1) нам теперь будет недостаточно, поскольку такими рядами представляются только функции, аналитические во всем круге $|z-z_0|<R$ (см. теорему 4.1). Но мы добавим к членам $c_n(z-z_0)^n$ с неотрицательными значениями n соответствующие члены с $n=-1,-2,\ldots$ и рассмотрим сумму двух рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{и} \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-z_0)^n .$$

Разложение функции $f(z)$ в кольце будем искать в виде

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n+\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (6.1)$$

причем под сходимостью ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ понимается сходимость обоих рядов в правой части (6.1). Как и в §4, мы докажем теоремы о существовании и единственности такого разложения. Естественно начать с теоремы существования.

Теорема 6.1 **(теорема Лорана о существовании разложения функции, аналитической в кольце, в ряд (6.1)).** Пусть функция $f(z)$ аналитична в кольце $V=\{r<|z-z_0|<R\}$. Тогда в этом кольце ее можно представить в виде суммы сходящегося ряда

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \qquad (6.2)$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi-z_0|=\rho}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}},\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ r<\rho<R. \qquad (6.3)$$

Доказательство. Пусть z – какая-либо точка кольца V. Построим кольцо $V'=\{r'<|\xi-z_0|<R'\}$, лежащее внутри кольца V и содержащее точку z. Для этого следует выбрать числа r' и R' так, чтобы $r<r'<|z-z_0|<R'<R$ (рис.7).

Обозначим через Γ_1 и Γ_2 окружности $|\xi-z_0|=R'$ и $|\xi-z_0|=r'$; обход обеих окружностей зададим против часовой стрелки. Через Γ_2^- обозначим окружность $|\xi-z_0|=r'$ с обходом по часовой стрелке. Функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{V'}$, граница Γ'

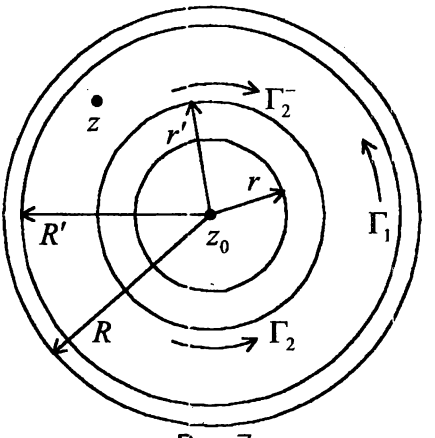


Рис. 7

которой состоит из кривых Γ_1 и Γ_2^- (напомним, что при обходе границы область должна оставаться слева). По интегральной формуле Коши (см. теорему 17.1 юниты 1).

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^-}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}. \quad (6.4)$$

Разложение в ряд первого интеграла в правой части (6.4) проводится так же, как и в доказательстве теоремы 4.2. Функцию $\frac{1}{\xi-z}$ представляем в виде

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(\xi-z_0)-(z-z_0)}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\frac{1}{1-q},$$

где $q=\frac{z-z_0}{\xi-z_0}$. Для всех $\xi\in\Gamma_1$ имеем $|z-z_0|<|\xi-z_0|$, т.е. $|q|<1$. Поэтому применима формула (4.6), согласно которой

$$\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{\xi-z_0}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}, \quad (6.5)$$

причем ряд (6.5) сходится абсолютно и равномерно по переменной ξ на Γ_1. Умножая равенства (6.5) на функцию $\frac{1}{2\pi i}f(\xi)$, ограниченную на Γ_1 (согласно замечанию 2.5, равномерная сходимость рядов в (6.5) при этом не нарушается), и интегрируя почленно вдоль Γ_1, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)(z-z_0)^n d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \quad (6.6)$$

где

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}},\ n=0,1,2,\ldots. \quad (6.7)$$

Итак, первый интеграл в правой части (6.4) мы разложили в сходящийся ряд по неотрицательным степеням $(z-z_0)$. Второй интеграл в (6.4) придется разлагать иначе, поскольку для $\xi \in \Gamma_2$ будет $|z-z_0|>|\xi-z_0|$ и , следовательно, ряды в (6.5) расходятся. Имеем

$$-\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{(z-z_0)-(\xi-z_0)}=\frac{1}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)}=\frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-q_1},$$

где $q_1=\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}$. Для всех $\xi \in \Gamma_2$ имеем $|\xi-z_0|<|z-z_0|$, т.е. $q_1<1$. Снова применяя формулу (4.6), получаем

$$-\frac{1}{\xi-z}=\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}. \qquad (6.8)$$

При всех $\xi \in \Gamma_2$

$$\left|\frac{(\xi-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}\right|=\frac{1\cdot}{|z-z_0|}\cdot\left|\frac{\xi-z_0}{z-z_0}\right|^n=\frac{1}{|z-z_0|}|q_1|^n.$$

Поскольку ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|q_1|^n$ сходится, то в силу признака равномерной сходимости Вейерштрасса (теорема 2.2) ряд в правой части (6.8) сходится на Γ_2 абсолютно и равномерно по переменной ξ. Нам удобно переписать этот ряд в несколько иной форме, введя новый индекс суммирования k равенством $k=-n-1$, т.е. $n=-k-1$. Когда n принимает значения $0,1,2,\ldots$, индекс k пробегает значения $-1,-2,-3,\ldots$ Поэтому равенство (6.8) перепишется в виде

$$-\frac{1}{\xi-z}=\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{(\xi-z_0)^{-k-1}}{(z-z_0)^{-k}}=\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\xi-z_0)^{k+1}}. \qquad (6.9)$$

Умножим равенства (6.9) на $\frac{1}{2\pi i} f(\xi)$ (что не нарушит равномерной сходимости рядов в (6.9) на окружности Γ_2) и проинтегрируем почленно вдоль Γ_2:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\sum_{k=-1}^{-\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)(z-z_0)^k d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}}=\sum_{k=-1}^{-\infty}c_k(z-z_0)^k, \qquad (6.10)$$

где

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{k+1}},\ k=-1,-2,\ldots. \qquad (6.11)$$

Индекс k в формулах (6.10), (6.11) можно заменить любой другой буквой; в частности, можно снова обозначить его через n, где $n=-1,-2,\ldots$. Подставляя разложения (6.6) и (6.10) в (6.4), придем к равенству (6.2). Функция $\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ является аналитической в кольце $r<|\xi-z_0|<R$. В соответствии со свойством неизменяемости интеграла при деформации пути интегрирования (см. следствие 15.4 юниты 1), интегралы в (6.7) и (6.11) не изменятся, если окружности Γ_1 и Γ_2 заменить любым другим замкнутым путем интегрирования, лежащим в этом кольце. В частности, если выбрать произвольное ρ такое, что $r<\rho<R$, то обе окружности Γ_1 и Γ_2 можно заменить окружностью $|\xi-z_0|=\rho$. При этом равенства (6.7) и (6.11) запишутся единой формулой (6.3). Теорема 6.1 доказана.

Ряд (6.2) по целым степеням $(z-z_0)$ (как положительным, так и отрицательным), коэффициенты которого определяются по формулам (6.3), называется **рядом Лорана функции** $f(z)$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$

называется **правильной частью ряда Лорана**, а ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n$

(пишут также $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n$) – **главной частью ряда Лорана**

(обоснованность названий выяснится в дальнейшем).

Перейдем теперь к вопросу о единственности разложения (6.2).

Теорема 6.2 **(теорема единственности разложения функции в ряд Лорана).** Пусть в некотором кольце $V = \{r < |z-z_0| < R\}$ функция $f(z)$ разлагается в ряд (6.2). Тогда $f(z)$ является аналитической в V функцией, а коэффициенты c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, разложения определяются однозначно по формулам (6.3).

Доказательство. Так как по условию теоремы ряд (6.2) сходится в V, то сходятся оба ряда в правой части (6.1), составляющие ряд (6.2). Первый из них – ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ – является обычным степенным рядом, равномерно сходящимся в некотором круге с центром z_0 и расходящимся вне него. Радиус этого круга не может быть меньше R; в противном случае степенной ряд расходился бы в некоторых точках кольца V. Поэтому все кольцо V лежит в круге сходимости. Так как сумма степенного ряда аналитична в круге сходимости (см. свойство 3.6), то сумма $S_1(z)$ ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ аналитична в V.

Рассмотрим теперь второй ряд в правой части (6.1), а именно ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n$. Сделаем замену переменных, положив $Z = \dfrac{1}{z-z_0}$, $k = -n$. Тогда изучаемый ряд примет вид $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} Z^k$. Этот ряд является степенным рядом относительно переменной Z с центром $Z_0 = 0$; он

равномерно сходится в некотором круге $|Z| < R_0$, расходится вне него, и его сумма является аналитической функцией в этом круге. Возвратимся теперь к переменной z. Тогда круг $|Z| < R_0$ перейдет в множество $\left|\frac{1}{z - z_0}\right| < R_0$, или $|z - z_0| > 1/R_0$, т.е. во внешность круга с центром z_0 радиуса $1/R_0$. Таким образом, ряд $\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z - z_0)^n$ равномерно сходится при $|z - z_0| > 1/R_0$ к аналитической функции $S_2(z)$ и расходится при $|z - z_0| < 1/R_0$. Поэтому внутренний радиус r кольца V должен быть таким, что $r \quad 1/R_0$; в противном случае изучаемый ряд будет расходиться в некоторых точках кольца. Следовательно, все кольцо лежит в области сходимости $|z - z_0| > 1/R_0$ этого ряда.

Итак, оба ряда в правой части (6.1) равномерно сходятся в кольце V и их суммы $S_1(z)$ и $S_2(z)$ аналитичны в V. Значит, функция $f(z) = S_1(z) + S_2(z)$ аналитична в V.

Покажем, что коэффициенты c_n разложения определяются однозначно по формулам (6.3). Возьмем окружность $\Gamma = \{|z - z_0| = \rho\}$, $r < \rho < R$. Ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^k = f(z)$$

сходится на ней равномерно, и это свойство сохранится после умножения обеих частей на произвольную степень $(z - z_0)^{-n-1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, так как каждая из этих степеней является функцией, ограниченной на Γ (см. замечание 2.5):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-n-1} = f(z)(z - z_0)^{-n-1} = \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

В силу теоремы 2.4 полученный ряд можно почленно интегрировать вдоль Γ:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{\Gamma} (z-z_0)^{k-n-1} = \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}. \qquad (6.12)$$

Воспользуемся теперь равенством (14.7) из юниты 1:

$$\int_{\Gamma} (z-z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при } m = -1, \end{cases}$$

согласно которому все интегралы в левой части (6.12) равны нулю, кроме одного, для которого $k+n-1=-1$ (т.е. $k=n$) и который равен $2\pi i$. Поэтому в сумме из (6.12) остается лишь одно слагаемое при $k=n$, и мы получаем:

$$2\pi i c_n = \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \; n = 0, \; 1, \; 2, \ldots,$$

что равносильно равенствам (6.3). Теорема 6.2 доказана.

При доказательстве теоремы 6.2 мы установили, что ряд (6.2) сводится к объединению двух степенных рядов, один из которых сходится внутри некоторого круга с центром z_0, а другой – вне круга меньшего радиуса с тем же центром (если бы радиус второго круга был больше, то множество сходимости ряда (6.2) было бы пустым). Обозначим радиусы этих кругов через R и r соответственно (здесь не утверждается, что эти числа совпадают с внешним и внутренним радиусами кольца V в теоремах 6.1, 6.2). Отсюда и из свойств степенных рядов (см. §3) вытекают следующие свойства ряда (6.2).

Свойство 6.3. Множеством сходимости ряда (6.2) является кольцо $V = \{r < |z-z_0| < R\}$ с возможным добавлением некоторых или всех точек на его границе. При этом возможны случаи $r=0$ и $R=$.

Свойство 6.4. Сумма $S(z)$ ряда (6.2) является аналитической функцией внутри кольца V.

Свойство 6.5. Ряд (6.2) можно почленно интегрировать и почленно дифференцировать внутри кольца V любое число раз. Полученные при этом ряды имеют то же кольцо сходимости V, что и исходный ряд (6.2); сходимость в граничных точках может не сохраняться.

Свойство 6.6. Если $V=\{r<|z-z_0|<R\}$ является кольцом сходимости ряда Лорана функции $f(z)$ и $0<r<R<\infty$, то и на внутренней, и на внешней границах кольца V лежат особые точки функции $f(z)$.

Доказательство. Ряд Лорана функции $f(z)$ есть объединение двух степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ и $\sum_{k=1}^{\infty}c_{-k}Z^k$, $Z=\frac{1}{z-z_0}$. Кругами сходимости этих рядов являются $|z-z_0|<R$ и $|Z|<1/r$. Согласно замечанию 2 §4, на границе круга сходимости степенного ряда лежат особые точки его суммы. Значит, на окружностях $|z-z_0|=R$ и $|Z|=1/r$ (т.е. $|z-z_0|=r$) лежат особые точки функций $S_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ и $S_2(z)=\sum_{n=-1}^{-\infty}c_n(z-z_0)^n$ соответственно. Следовательно, на этих окружностях лежат особые точки функции $f(z)=S_1(z)+S_2(z)$.

Для нахождения разложений в ряд Лорана широко используются те же приемы, что и для разложения в ряд Тейлора, а именно метод подстановки, почленное интегрирование и дифференцирование рядов и т.д.

Пример 6.7. Найти все лорановские разложения функции $f(z)=\frac{z+1}{z(z-1)}$ по степеням $z-1$.

Решение. Сделаем замену переменной: $w=z-1$, т.е. $z=w+1$. Выполнив подстановку, получим функцию $g(w)=\frac{w+2}{(w+1)w}$. Разложим полученную дробь в сумму простейших дробей (подробнее о разложении в сумму простейших дробей см. §13). Разложение будем искать в виде:

$$\frac{w+2}{(w+1)w}=\frac{A}{w}+\frac{B}{w+1},$$

где A и B – числа, которые предстоит найти. С этой целью приведем дроби, стоящие справа, к общему знаменателю:

$$\frac{w+2}{(w+1)w}=\frac{A(w+1)+Bw}{w(w+1)}.$$

Отсюда следует, что $w+2=A(w+1)+Bw$, причем равенство выполнено при всех значениях w, включая $w=0$ и $w=-1$ (это следует из непрерывности левой и правой частей этого равенства). При $w=0$ получаем $2=A$, т.е. $A=2$; подставляя $w=-1$, имеем $1=-B$, т.е. $B=-1$. Таким образом,

$$g(w)=\frac{w+2}{(w+1)w}=\frac{2}{w}-\frac{1}{w+1}.$$

Эта функция имеет особые точки $w=0$, $w=-1$ и, следовательно, аналитична в кольцах $V_1=\{0<|w|<1\}$ и $V_2=\{1<|w|<\infty\}$. Найдем лорановские разложения в каждом из этих колец. При $|w|<1$ справедлива формула (4.14), которая дает

$$g(w)=\frac{2}{w}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n=\frac{2}{w}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}w^n,\ 0<|w|<1.$$

При $|w|>1$ полученный ряд перестает сходиться. Поэтому для разложения функции $g(w)$ в кольце V_2 следует преобразовать дробь

$$-\frac{1}{w+1}=-\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{w}}.$$

При $|w|>1$ будет $\left|\frac{1}{w}\right|<1$. Поэтому применима формула (4.14), если вместо z подставить в нее $1/w$. Выполняя указанные подстановки, получим

$$g(w)=\frac{2}{w}-\frac{1}{w+1}=\frac{2}{w}-\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1+1/w}=\frac{2}{w}-\frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{w^n}=$$

$$= \frac{2}{w} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} w^{-(n+1)} = \frac{2}{w} - \frac{1}{w} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} w^{-(n+1)} = \frac{1}{w} + \sum_{k=-2}^{-\infty} (-1)^k w^k ,$$

$1 < |w| < \infty$ (мы сделали замену $k = -(n+1)$ и воспользовались равенством $(-1)^k = (-1)^{-k}$). Возвращаясь к переменной $z = w + 1$, получаем искомые разложения функции $f(z)$:

$$f(z) = \frac{2}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n , \; 0 < |z-1| < 1; \qquad (6.13)$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{k=-2}^{-\infty} (-1)^k (z-1)^k , \; 1 < |z-1| < \infty . \qquad (6.14)$$

При $0 < |z-1| < 1$ главная часть разложения состоит только из одного члена $\frac{2}{z-1}$ (все остальные коэффициенты главной части равны нулю), а ряд в (6.13) дает правильную часть разложения. При $1 < |z-1| < \infty$ разложение состоит только из главной части, а все коэффициенты правильной части обращаются в нуль. По теореме 6.2 полученные разложения единственны (хотя их можно находить и другим способом). Заметим, что каждая граница рассматриваемых колец (т.е. окружности $|z-1| = 0$ с радиусом 0 и $|z-1| = 1$ с радиусом 1) содержат особые точки функции $f(z)$.

ГЛАВА II. ИЗОЛИРОВАННЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ И ТЕОРИЯ ВЫЧЕТОВ

§7. Классификация изолированных особых точек

Пусть z_0 является особой точкой функции $f(z)$, т.е. $f(z)$ не является аналитической в этой точке (в частности, может быть не определена в ней). Если найдется такая проколотая окрестность точки z_0 (т.е. множество $0<|z-z_0|<R$), в которой $f(z)$ аналитична, то z_0 называется *изолированной особой точкой* функции $f(z)$. Данное определение сохраняется и в случае $z_0=\infty$, если под проколотой окрестностью точки $z_0=\infty$ понимать множество $|z|>R$ – внешность некоторого круга с центром в начале координат. Другими словами, особая точка z_0 называется изолированной, если найдется такая окрестность этой точки, в которой нет других особых точек, отличных от z_0.

В зависимости от поведения $f(z)$ при $z\to z_0$ различают три типа особых точек. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ называется:

1) **устранимой особой точкой**, если существует конечный предел

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A;$$

2) **полюсом**, если существует

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty;$$

3) **существенно особой точкой**, если $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z\to z_0$.

Пример 7.1. Покажем, что все три типа особых точек реализуются. Рассмотрим $f_1(z)=\dfrac{\sin z}{z}$. Точка $z_0=0$ является изолированной особой точкой этой функции. Используя формулу (4.12), получим разложение

$$f_1(z)=\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\ldots\doteq\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n+1)!},$$

из которого следует, что существует $\lim\limits_{z=0} f_1(z)=1$. Поэтому $z_0=0$ является устранимой особой точкой функции $f_1(z)$.

Функция $f_2(z)=\dfrac{1}{z-1}$ имеет полюс в точке $z_0=1$, поскольку

$$\lim_{z\to 1}\frac{1}{z-1}=\infty.$$

Рассмотрим теперь функцию $f_3(z)=e^{1/z}$ и покажем, что $z_0=0$ является существенно особой точкой этой функции. При стремлении z к нулю по действительной оси пределы функции $f_3(z)$ различны: $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{1/z}=\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{1/z}=0$. Отсюда следует, что $f_3(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z\to 0$, т.е. $z_0=0$ – существенно особая точка этой функции. (Заметим, что при стремлении $z=iy$ к нулю по мнимой оси функция $e^{1/z}=e^{-i/y}=\cos\dfrac{1}{y}-i\sin\dfrac{1}{y}$ вообще не имеет предела.)

Могут, конечно, существовать и неизолированные особые точки. Например, функция $\dfrac{1}{\sin(\pi/z)}$ имеет полюсы в точках $z_n=\dfrac{1}{n}$ $(n=\pm1,\pm2,\ldots)$. Следовательно, $z_0=0$ является неизолированной особой точкой этой функции: в любой (сколь угодно малой) окрестности этой точки имеются другие особые точки z_n.

Пусть z_0 – конечная изолированная особая точка функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности $0<|z-z_0|<R$ точки z_0; эту окрестность можно рассматривать как

кольцо с внутренним радиусом $r = 0$. По теореме 6.1 в рассматриваемой окрестности функцию $f(z)$ можно разложить в ряд Лорана (6.2). Мы покажем, что поведение функции при $z \to z_0$ (т.е. тип особой точки z_0) зависит от вида главной части разложения (6.2); этим обстоятельством и объясняется происхождение термина "главная часть".

Теорема 7.2. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда лорановское разложение в проколотой окрестности этой точки имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (7.1)$$

т.е. состоит только из правильной части, а все коэффициенты главной части равны нулю.

Доказательство. 1. Пусть z_0 – устранимая особая точка. Докажем, что лорановское разложение функции $f(z)$ имеет вид (7.1). Так как особая точка z_0 устранимая, то существует конечный предел $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$. Следовательно, $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < R_1$ точки z_0, т.е. $|f(z)| < M$ для всех z из этой окрестности. Возьмем любое ρ, $0 < \rho < R_1$, и воспользуемся формулами (6.3) для коэффициентов ряда Лорана:

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{|f(\xi)| \cdot |d\xi|}{|\xi - z_0|^{n+1}} \le \frac{M}{2\pi \rho^{n+1}} \int\limits_{|\xi - z_0| = \rho} |d\xi| =$$

$$= \frac{M}{2\pi \rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = M\rho^{-n}; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Для коэффициентов главной части разложения $n = -1, -2, \ldots$. Для таких значений n $\rho^{-n} \to 0$ при $\rho \quad 0$. Так как значение ρ может быть выбрано сколь угодно малым, то и $M\rho^{-n}$ может быть сколь угодно малым. Поскольку $|c_n| \le M\rho^{-n}$ и c_n не зависят от ρ, то $c_n = 0$,

$n = -1,-2,...$, что и требовалось доказать.

2. Предположим теперь, что лорановское разложение имеет вид (7.1). Ряд (7.1) является степенным рядом и, следовательно, сходится не только в проколотой, но и во всей окрестности $|z-z_0|<R$, включающей точку z_0; его сумма $S(z)$ аналитична при $|z|<R$ и $S(z)=f(z)$ при $0<|z-z_0|<R$. Поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\lim\limits_{z\to z_0} S(z)=S(z_0)$. Следовательно, особая точка z_0 – устранимая. Теорема 7.2 доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что в проколотой окрестности $0<|z-z_0|<R$ устранимой особой точки функция $f(z)$ совпадает с функцией $S(z)$, аналитической во всей окрестности $|z-z_0|<R'$. Поэтому, если мы положим $f(z_0)=S(z_0)$, то, не меняя значений функции $f(z)$ ни в каких точках проколотой окрестности, мы сделаем эту функцию аналитической в z_0, т.е. "устраним" эту особенность. Этим и объясняется термин "устранимая особенность". Такие точки естественно считать правильными, а не особыми точками функции $f(z)$.

Рассмотрим, например, функцию $f_1(z)=\dfrac{\sin z}{z}$. В примере 7.1 было показано, что $\lim\limits_{z\to 0} f_1(z)=1$, т.е. особая точка $z_0=0$ – устранимая. Полагая $f_1(0)=1$, мы тем самым устраним особенность и получим функцию, аналитическую в точке $z_0=0$ (и во всей плоскости C).

Дадим теперь характеристику полюсов в терминах лорановских разложений.

Теорема 7.3. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть разложения Лорана с центром z_0 имеет лишь конечное (и положительное) число отличных от нуля коэффициентов c_n:

$$f(z)=\sum_{n=-N}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,\ N>0. \qquad (7.2)$$

Доказательство. 1. Пусть z_0 – полюс, т.е. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$. Докажем, что лорановское разложение функции $f(z)$ имеет вид (7.2). Так как $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$, то существует проколотая окрестность точки z_0, в которой $f(z)$ аналитична и не имеет нулей. Тогда функция $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ будет также аналитической в этой проколотой окрестности, причем $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=0$. Следовательно, z_0 является устранимой особой точкой функции $g(z)$. Доопределим $g(z)$ в точке z_0, положив $g(z_0)=0$. Тогда $g(z)$ станет аналитической во всей окрестности (не проколотой) точки z_0, причем z_0 будет ее изолированным нулем. Обозначим через N кратность (порядок) этого нуля. Как было показано в §5, в окрестности точки z_0 функция $g(z)$ представима в виде (см. (5.2))

$$g(z)=(z-z_0)^N\varphi(z),\ \text{причем}\ \varphi(z_0)\neq 0,$$

и $\varphi(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0. Так как $\varphi(z)$ непрерывна в точке z_0 и $\varphi(z_0)\neq 0$, то $\varphi(z)$ не имеет нулей и в некоторой окрестности этой точки. Поэтому функция $1/\varphi(z)$ будет также аналитической в этой окрестности и, следовательно, разлагается в ней в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{\varphi(z)}=b_0+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\ldots+b_n(z-z_0)^n+\ldots,\ b_0=\frac{1}{\varphi(z_0)}\neq 0.$$

Отсюда получаем

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^N\varphi(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^N}\cdot\frac{1}{\varphi(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^N}(b_0+$$

$$+b_1(z-z_0)+b_2(z-z_0)^2+\ldots).$$

Раскрывая скобки и меняя обозначения коэффициентов, запишем последнее разложение в виде

$$f(z)=\frac{c_{-N}}{(z-z_0)^N}+\frac{c_{-N+1}}{(z-z_0)^{N-1}}+\ldots+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=$$

$$=\sum_{n=-N}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,. \qquad (7.3)$$

где $c_{-N}=b_0\neq 0$. Таким образом, главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ содержит лишь конечное число членов; мы пришли к искомому равенству (7.2).

2. Пусть в проколотой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ представляется лорановским разложением (7.2) (в более развернутом виде см. (7.3)), главная часть которого содержит лишь конечное число членов, причем $c_{-N}\neq 0$. Надо доказать, что z_0 – полюс функции $f(z)$. Умножая равенство (7.3) на $(z-z_0)^N$, получим функцию

$$h(z)=f(z)(z-z_0)^N=c_{-N}+c_{-N+1}(z-z_0)+c_{-N+2}(z-z_0)^2+\ldots. \qquad (7.4)$$

Ряд в (7.4) является степенным рядом, сходящимся к аналитической функции не только в проколотой , но и во всей окрестности точки z_0. Поэтому функция $h(z)$ станет аналитической в этой окрестности, если доопределить ее в z_0, положив $h(z_0)=c_{-N}\neq 0$. Тогда

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{h(z)}{(z-z_0)^N}=\infty.$$

Таким образом, точка z_0 является полюсом и теорема 7.3 доказана.

Кратность (порядок) нуля z_0 функции $g(z)=1/f(z)$ называется **порядком полюса** z_0 функции $f(z)$. Если N – порядок полюса z_0, то $g(z)=(z-z_0)^N\varphi(z)$, $\varphi(z_0)\neq 0$, и, как показано в первой части доказательства теоремы 7.3, разложение функции $f(z)$ имеет вид (7.3), где $c_{-N}\neq 0$. Обратно, если $f(z)$ раскладывается в ряд (7.3) и $c_{-N}\neq 0$,

то $1/f(z)=(z-z_0)^N\cdot\dfrac{1}{h(z)}=(z-z_0)^N\varphi(z)$, где $\varphi(z_0)=1/h(z_0)\neq 0$, т.е. N – порядок полюса функции $f(z)$. Таким образом, порядок полюса z_0 функции $f(z)$ равен номеру старшего ненулевого коэффициента главной части лорановского разложения в проколотой окрестности точки z_0 (т.е. равен такому числу N, что $c_{-N}\neq 0$ и $c_n=0$ при $n>N$).

Приведем следующее утверждение, удобное для применений.

Следствие 7.4. Точка z_0 является полюсом порядка N функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ представима в виде $f(z)=\dfrac{h(z)}{(z-z_0)^N}$, где $h(z)$ – аналитическая функция в окрестности точки z_0 и $h(z_0)\neq 0$.

Доказательство. Функция $\varphi(z)=1/h(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0. Условие следствия 7.4 равносильно следующему:

$$g(z)=1/f(z)=(z-z_0)^N\cdot\frac{1}{h(z)}=(z-z_0)^N\varphi(z),\ \varphi(z_0)\neq 0.$$

Поэтому z_0 – нуль кратности N функции $g(z)$, а значит, и полюс кратности N функции $f(z)$.

Пример 7.5. Найти изолированные особые точки функции $f(z)=\dfrac{z-1}{(z^2+1)(z+3)^2}$ и определить их тип.

Решение. Особыми будут точки, в которых $(z^2+1)(z+3)^2=0$. Если $z^2+1=0$, то $z=\pm i$; если $(z+3)^2=0$, то $z=-3$. Поэтому функция имеет три особые точки $z_1=i$, $z_2=-i$, $z_3=-3$. Рассмотрим z_1:

$$f(z)=\frac{z-1}{(z-i)(z+i)(z+3)^2}=\frac{1}{z-i}\cdot\frac{z-1}{(z+i)(z+3)^2}=\frac{h_1(z)}{z-i},$$

$$h_1(z)=\frac{z-1}{(z+i)(z+3)^2}.$$

Так как $h_1(i)=\frac{i-1}{2i(i+3)^2}\neq 0$, то $z_1=i$ – полюс 1 порядка (мы воспользовались следствием 7.4). Аналогично доказывается, что $z_2=-i$ – тоже полюс 1 порядка. Для z_3 имеем:

$$f(z)=\frac{z-1}{(z-i)(z+i)(z+3)^2}=\frac{h_3(z)}{(z+3)^2};\ h_3(z)=\frac{z-1}{(z-i)(z+i)}.$$

Так как $h_3(-3)=\frac{-3-1}{-4(-3+i)}\neq 0$, то $z_3=-3$ – полюс 2 порядка.

Перейдем к рассмотрению существенно особых точек.

Теорема 7.6. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой тогда и только тогда, когда главная часть разложения Лорана с центром z_0 имеет бесконечно много отличных от нуля коэффициентов c_n.

Доказательство. Теорема 7.6 непосредственно вытекает из теорем 7.2 и 7.3. Действительно, если точка z_0 – существенно особая, то главная часть лорановского разложения не может отсутствовать либо содержать конечное число членов (в противном случае точка z_0 будет либо устранимой, либо полюсом). Поэтому число членов в главной части должно быть бесконечным. Обратно, если главная часть содержит бесконечно много членов, то z_0 не может быть ни устранимой точкой, ни полюсом. Следовательно, эта точка – существенно особая.

Согласно определению, существенно особая точка характеризуется тем, что функция $f(z)$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z\to z_0$. Полное представление о том, насколько нерегулярным является поведение функции в окрестности существенно особой точки, дает следующая теорема.

***Теорема 7.7* (теорема Сохоцкого).** Если z_0 – существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого комплексного числа A, включая $A=\infty$, найдется последовательность точек z_n такая, что $z_n \to z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $A=\infty$. В первой части доказательства теоремы 7.2 мы установили, что если $f(z)$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки z_0, то все коэффициенты c_n, $n=-1,-2,\ldots$, главной части равны нулю (и, следовательно, особенность z_0 – устранимая). Так как по условию z_0 – существенно особая точка, то в любой проколотой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ является неограниченной. Возьмем некоторую проколотую окрестность $0<|z-z_0|<R$, в которой $f(z)$ является аналитической. В этой окрестности найдется точка z_1 такая, что $|f(z_1)|>1$ (если бы $|f(z)|<1$ во всех точках, то $f(z)$ была бы ограниченной). Точно так же в проколотой окрестности $0<|z-z_0|<R/2$ найдется точка z_2, в которой $|f(z_2)|>2$, и так далее: в проколотой окрестности $0<|z-z_0|<R/n$ найдется точка z_n, в которой $|f(z_n)|>n$. Очевидно, что $z_n \to z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$. Таким образом, в случае $A=\infty$ теорема 7.7 доказана.

Пусть теперь $A\neq\infty$. Предположим вначале, что найдется проколотая окрестность $0<|z-z_0|<R_1$, в которой $f(z) \quad A$. Тогда функция $\psi(z)=\dfrac{1}{f(z)-A}$ будет аналитической в этой проколотой окрестности и, следовательно, z_0 является изолированной особой точкой функции $\psi(z)$. Покажем, что z_0 – существенно особая точка $\psi(z)$. Пусть это неверно. Тогда существует $\lim\limits_{z\to z_0}\psi(z)$, конечный либо бесконечный. Поскольку $f(z)=A+\dfrac{1}{\psi(z)}$, то тогда существует и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$, что противоречит условию

теоремы. Таким образом, z_0 – существенно особая точка функции $\psi(z)$. Согласно доказанному выше, найдется последовательность точек z_n такая, что $z_n \to z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(z_n) = \infty$. Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty}\left(A + \frac{1}{\psi(z_n)}\right) = A + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\psi(z_n)} = A.$$

Мы доказали нужное утверждение в предположении, что $f(z) \neq A$ в некоторой проколотой окрестности точки A. Предположим теперь, что это неверно, т.е. в любой сколь угодно малой окрестности точки z_0 найдется такая точка z', что $f(z') = A$. Тогда для любого n в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < R/n$ можно выбрать такую точку z_n. Мы получим последовательность точек, для которых $f(z_n) = A$ и $z_n \to z_0$. Поэтому и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$. Таким образом, нужное утверждение справедливо во всех случаях, и теорема 7.7 доказана.

Согласно теореме 7.7 Сохоцкого, в любой (сколь угодно малой) проколотой окрестности существенно особой точки функция $f(z)$ принимает значения, сколь угодно близкие к любому числу из расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$.

Для исследования изолированных особых точек часто бывают полезными уже известные тейлоровские разложения основных элементарных функций.

Пример 7.8. Определить тип особой точки $z_0 = 0$ для функции

$$f(z) = \frac{e^{3z} - 1}{\sin z - z - z^3/6}.$$

Решение. Разложим числитель и знаменатель в ряд Тейлора по степеням z. Подставляя в (4.11) $3z$ вместо z и вычитая 1, получим

$$e^{3z} - 1 = 3z + \frac{(3z)^2}{2!} + \frac{(3z)^3}{3!} + \ldots = z\left(3 + \frac{9z}{2} + \frac{27z}{6} + \ldots\right).$$

Используя (4.12), получим разложение знаменателя

$$\sin z - z - \frac{z^3}{6} = \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots = z^5\left(\frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \ldots\right);$$

ряды в этих разложениях сходятся во всей комплексной плоскости C. Имеем

$$f(z) = \frac{z\left(3 + \frac{9z}{2} + \frac{27z^2}{6} + \ldots\right)}{z^5\left(\frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \ldots\right)} = \frac{1}{z^4} \cdot \frac{3 + \frac{9z}{2} + \frac{27z^2}{6} + \ldots}{\frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \ldots} = \frac{1}{z^4} h(z),$$

где $h(z) = \dfrac{3 + \frac{9z}{2} + \frac{27z^2}{6} + \ldots}{\frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \ldots}$. Так как $h(z) = \dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, причем $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в окрестности точки $z_0 = 0$ (и даже во всей плоскости) и $f_2(z_0) \neq 0$, то $h(z)$ также аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 = 0$; при этом $h(0) = 3 \cdot 5! \neq 0$. Согласно следствию 7.4, точка $z_0 = 0$ является полюсом порядка $N = 4$.

Пример 7.9. Найти особые точки функции $f(z) = \sin \dfrac{1}{z-1}$ и определить их тип.

Р е ш е н и е. Функция имеет единственную (конечную) особую точку $z_0 = 1$; в остальных точках из C функция $w = \dfrac{1}{z-1}$ аналитична; следовательно, и $\sin w$ будет аналитической.

Подставляя в разложение синуса (4.12) $\dfrac{1}{z-1}$ вместо z, получим

$$\sin \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{(z-1)^5} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z-1)^{2n+1}}.$$

Мы получили разложение функции $\sin\frac{1}{z-1}$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z_0=1$. Поскольку полученное разложение содержит бесконечно много членов с отрицательными степенями $z-1$, то $z_0=1$ – существенно особая точка (в данном случае лорановское разложение состоит только из главной части, а правильная часть отсутствует). Заметим, что установить характер особенности в данном случае можно было и непосредственно из определения, не прибегая к разложению в ряд. Действительно, существуют последовательности $\{z_n'\}$ и $\{z_n''\}$, сходящиеся к $z_0=1$, и такие, что $f(z_n')=1$, $f(z_n'')=\infty$ (укажите такие последовательности самостоятельно). Значит, $f(z)$ не имеет предела при $z\to 1$ и, следовательно, точка $z_0=1$ является существенно особой.

Введем лорановское разложение функции в окрестности точки $z_0=\infty$ и рассмотрим его связь с характером особенности в этой точке. Отметим, что определения изолированной особой точки и ее типа (устранимая, полюс либо существенно особая) переносятся на случай $z_0=\infty$ без изменений. Но теоремы 7.2, 7.3 и 7.6, связанные с характером лорановских разложений, нуждаются в изменении. Дело в том, что члены главной части $c_n(z-z_0)^n$, $n=-1,-2,\ldots$, определяющие "нерегулярность" функции вблизи конечной точки z_0, при стремлении z к ∞ будут вести себя "правильно" (стремиться к 0). Напротив, члены правильной части с $n=1,2,\ldots$ будут стремиться к ∞; они и определяют характер особенности в $z_0=\infty$. Поэтому главную часть разложения в окрестности ∞ будут составлять члены с положительными степенями n, а правильную – с отрицательными.

Введем новую переменную $w=\frac{1}{z}$. Функция $w=\frac{1}{z}$, доопределенная так, что $w(\infty)=0$, взаимно-однозначно и конформно отображает окрестность $|z|>R$ точки $z_0=\infty$ в окрестность $|w|<1/R$

точки $w_0 = 0$. Если функция $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности $R < |z| < \infty$ точки $z_0 = \infty$, то функция $G(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ будет аналитической в проколотой окрестности $0 < |w| < 1/R$ точки $w_0 = 0$. Так как при $z \to \infty$ будет $w \to 0$, то

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{w\to 0} G(w).$$

Поэтому $G(w)$ имеет в точке $w_0 = 0$ особенность того же типа, что $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$. Разложим функцию $G(w)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $w_0 = 0$:

$$G(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k w^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} b_k w^k; \qquad (7.5)$$

суммы в правой части (7.5) представляют правильную и главную части разложения соответственно. Перейдем к переменной z, подставив $w = \frac{1}{z}$:

$$G\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k} + \sum_{k=-1}^{-\infty} b_k z^{-k}.$$

Обозначая $n = -k$, $b_k = b_{-n} = c_n$ и замечая, что $G\left(\frac{1}{z}\right) = f(z)$, получим:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{-\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \qquad (7.6)$$

Разложение (7.6) называется **разложением Лорана функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки $z_0 = \infty$**. Первая сумма в (7.6) называется **правильной частью**, а вторая сумма – **главной частью** этого разложения. Поскольку эти суммы соответствуют правильной и главной частям разложения (7.5), то для разложения (7.6) справедливы аналоги теорем 7.2, 7.3 и 7.6. Так, аналогом теоремы 7.2 будет теорема 7.10.

Теорема 7.10. Изолированная особая точка $z_0 = \infty$ функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда лорановское разложение в проколотой окрестности этой точки имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{-\infty} c_n z^n = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots, \qquad (7.7)$$

т.е. состоит только из правильной части.

Положим $f(\infty) = c_0$. Функция, определенная рядом (7.7), сходящимся в окрестности $|z| > R$ точки $z_0 = \infty$, называется *аналитической в точке* $z_0 = \infty$. (Заметим, что это определение равносильно аналитичности функции $G(w)$ в точке $w_0 = 0$.)

Пример 7.11. Исследовать особую точку $z_0 = \infty$ функции

$$f(z) = \frac{z-1}{(z^2+1)(z+3)^2}.$$

Решение. Перейдем к переменной $w = \frac{1}{z}$. Подставляя $z = \frac{1}{w}$, получим

$$G(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{\frac{1}{w} - 1}{\left(\frac{1}{w^2}+1\right)\left(\frac{1}{w}+3\right)^2} = \frac{(1-w)w^4}{w(1+w^2)(1+3w)} = \frac{(1-w)w^3}{(1+w^2)(1+3w)}$$

(последнее равенство справедливо в проколотой окрестности точки $w_0 = 0$, но мы доопределим $G(0) = 0$).

Полученная функция $G(w)$ имеет особые точки $w = i$, $w = -1/3$. Значит, $z_0 = \infty$ является устранимой особой точкой функции $f(z)$. Если положить $f(\infty) = G(0) = 0$, то $f(z)$ станет аналитической в точке $z_0 = \infty$. Раскладывая функцию $G(w)$ по степеням w (как это делалось

в примере 6.7) и подставляя в полученный степенной ряд $w=\frac{1}{z}$, можно получить разложение (7.7) функции $f(z)$.

Теорема 7.3 для случая $z_0=\infty$ перепишется в следующем виде.

Теорема 7.12. Изолированная особая точка $z_0=\infty$ функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть разложения Лорана (7.6) имеет лишь конечное (и положительное) число отличных от нуля коэффициентов c_n:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{-\infty} c_n z^n+(c_1 z+c_2 z^2+\ldots+c_N z^N),\ N>0. \qquad (7.8)$$

Здесь ряд является правильной частью, а многочлен в скобках – главной частью разложения. Кратность полюса в ∞ определяется как кратность полюса $w_0=0$ функции $G(w)$. Легко видеть, что кратность полюса совпадает с числом N в (7.8).

Задача. Покажите, что функция $f(z)=\frac{(z^2+1)(z+3)^2}{z-1}$ имеет в точке $z_0=\infty$ полюс порядка 3.

Теорема 7.6 о существенно особой точке переписывается для случая $z_0=\infty$ почти дословно, и мы не останавливаемся на этом подробно.

§8. Вычет функции в изолированной особой точке

Согласно теореме Коши (см. теорему 15.1 юниты 1), интеграл от аналитической функции $f(z)$ по замкнутому контуру Γ равен нулю, если Γ лежит в области аналитичности функции $f(z)$ и не содержит внутри себя особых точек функции $f(z)$. Если же внутри контура Γ имеются особые точки, то интеграл по Γ от $f(z)$ может быть отличным от нуля. Оказывается, значение этого интеграла зависит от поведения функции лишь в сколь угодно малых проколотых окрестностях особых точек внутри Γ; точнее, зависит от интегралов по сколь угодно малым контурам, охватывающим особые точки. Дадим нужное для дальнейшего

определение

Пусть z_0 – (конечная) изолированная особая точка функции $f(z)$. Тогда $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности $V = \{0 < |z - z_0| < R\}$ точки z_0. Возьмем замкнутый контур γ, лежащий в этой окрестности и охватывающий точку z_0. **Вычетом функции $f(z)$ в точке z_0** называется число, равное $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz$; предполагается, что контур γ обходится в положительном направлении (т.е. так, что внутренность контура с точкой z_0 остается слева). Вычет обозначается $res_{z_0} f$ (от французского слова residu). Таким образом,

$$res_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz. \qquad (8.1)$$

Согласно свойству неизменяемости интеграла при деформации пути интегрирования (см. следствие 15.4 юниты 1), интеграл в (8.1) принимает одно и то же значение для всех контуров, охватывающих z_0 и лежащих в V. В частности, в качестве γ можно взять окружность $|z - z_0| = \rho$ с центром z_0 и достаточно малым радиусом $\rho < R$.

***Теорема 8.1* (основная теорема о вычетах).** Пусть Γ – замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$, и пусть $f(z)$ аналитична во всех точках внутри Γ, за исключением n изолированных особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$. Тогда интеграл от $f(z)$ по Γ равен сумме вычетов в этих особых точках, умноженной на $2\pi i$:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f. \qquad (8.2)$$

Доказательство. Пусть внутри Γ расположены изолированные особые точки $z_1, z_2, ..., z_n$ (рис.8). Окружим каждую из этих точек z_k

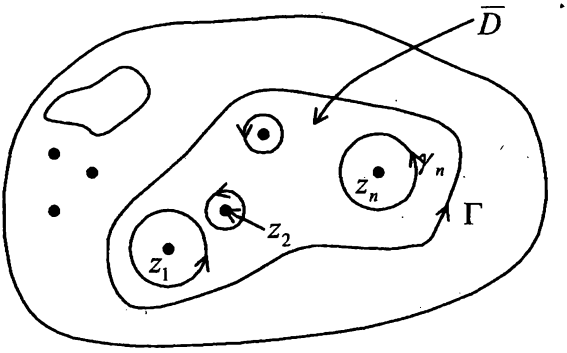


Рис. 8

достаточно малой окружностью $\gamma_k = \{|z - z_0| = \rho_k\}$ так, чтобы каждая γ_k заключала внутри себя только одну особую точку z_k, целиком лежала внутри Γ и не пересекалась с другими окружностями. Функция $f(z)$ аналитична в замкнутой $(n+1)$-связной области $\overline{D}$, ограниченной внешним контуром Γ и внутренними контурами $\gamma_1,...,\gamma_n$ (эта область получается, если из множества точек, лежащих на контуре Γ и внутри него, вырезать круги $|z - z_0| < \rho_k$). По теореме Коши для многосвязной области (см. теорему 15.2 и формулу (15.5) юниты 1)

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)dz. \qquad (8.3)$$

В силу (8.1) для каждого интеграла в правой части (8.3) справедливо равенство $\int_{\gamma_k} f(z)dz = 2\pi i \cdot res_{z_k} f$. Подставляя эти равенства в (8.3), приходим к формуле (8.2), что нам и требовалось.

Согласно теореме 8.1, такая характеристика функции $f(z)$, как интеграл по границе замкнутой области $\overline{D}$, зависит лишь от ее локальных свойств – поведения вблизи особых точек. Как мы сейчас увидим, вычеты функции в ее особых точках полностью определяются главными частями лорановских разложений в проколотых окрестностях этих точек. Таким образом, теорема 8.1 дает нам один из многих

примеров, когда важные глобальные характеристики аналитической функции определяются главными частями ее лорановских разложений. (Это обстоятельство допускает физическую интерпретацию. Если трактовать аналитическую функцию как комплексный потенциал поля скоростей течения жидкости, то особые точки будут интерпретироваться как источники, стоки, вихри и другие элементы, определяющие это поле. Не останавливаясь здесь на этом подробно, мы отсылаем читателя к книгам [1]–[12].) Установим теперь связь между вычетом функции и коэффициентами ее лорановского разложения.

Теорема 8.2. Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 равен коэффициенту c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ в лорановском разложении (6.2) функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки z_0:

$$res_{z_0} f = c_{-1}. \qquad (8.4)$$

Доказательство. Нужное равенство сразу следует из формулы (6.3) для коэффициентов c_n лорановского разложения. Действительно, полагая в (6.2) $n=-1$ и обозначая $\gamma = \{|\xi - z_0| = \rho\}$, получим

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^0} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\xi)d\xi = res_{z_0} f$$

(последнее равенство выполнено согласно (8.1)). Тем самым (8.4) доказано.

Если z_0 – устранимая особая точка, то лорановское разложение в проколотой окрестности этой точки состоит только из правильной части, а все коэффициенты главной части равны нулю. Отсюда и из теоремы 8.2 сразу следует, что *в устранимой особой точке z_0 вычет равен нулю.*

Дадим теперь удобные формулы для вычисления вычета в полюсе. Рассмотрим вначале полюсы первого порядка (такие полюсы называются *простыми*).

Теорема 8.3. 1. Пусть z_0 – полюс первого порядка функции $f(z)$. Тогда

$$res_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z). \qquad (8.5)$$

2. Пусть в проколотой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ аналитичны в z_0, причем $\varphi(z_0)\neq 0$, $\psi(z_0)=0$ и $\psi'(z_0)\neq 0$ (отсюда следует, что z_0 – нуль первого порядка функции $\psi(z)$ и, следовательно, полюс первого порядка функции $f(z)$). Тогда

$$res_{z_0} f=\frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \qquad (8.6)$$

Доказательство. 1. Пусть z_0 – полюс первого порядка. Согласно теореме 7.3, лорановское разложение функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z)=\frac{c_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Умножим обе части равенства на $z-z_0$:

$$(z-z_0)f(z)=c_{-1}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n+1}.$$

Переходя к пределу при $z\to z_0$ и применяя равенство (8.4), получим $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=c_{-1}=res_{z_0} f$, что и требовалось.

2. Предположим теперь, что $f(z)=\varphi(z)/\psi(z)$, причем функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ удовлетворяют указанным выше условиям. Применяя (8.5), получим

$$res_{z_0} f=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\varphi(z)}{\psi(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)\varphi(z)}{\psi(z)-\psi(z_0)}=\lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}}=$$

$$= \frac{\lim\limits_{z\to z_0} \varphi(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)},$$

и формула (8.6) доказана.

Теорема 8.4. Пусть z_0 – полюс порядка $n>1$ функции $f(z)$. Тогда

$$res_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)} \qquad (8.7)$$

(т.е. вычет функции $f(z)$ в точке z_0 равен пределу производной $(n-1)$-го порядка функции $(z-z_0)^n f(z)$, деленному на $(n-1)!$).

Доказательство. Так как z_0 – полюс порядка n, то лорановское разложение функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k.$$

Умножим обе части равенства на $(z-z_0)^n$:

$$(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} + \ldots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+n}.$$

Полученное равенство продифференцируем $(n-1)$ раз по переменной z. При этом $(n-1)$-е производные всех слагаемых со степенями, меньшими $n-1$, обратятся в нуль. Отсюда

$$\left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)} = (n-1)!c_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+n)(k+n-1)\ldots(k+2)(z-z_0)^{k+1}.$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$ и применяя равенство (8.4), получим

$$\lim_{z\to z_0} \left((z-z_0)^n f(z)\right)^{(n-1)} = (n-1)!c_{-1} = (n-1)!\,res_{z_0} f,$$

откуда сразу следует нужная формула (8.7).

Для вычисления вычетов в существенно особых точках аналогичных формул не существует, и надо находить главные части лорановского разложения.

Пример 8.5. Найти вычеты функции $f(z)=\dfrac{z-1}{(z^2+1)(z+3)^2}$ в ее особых точках.

Решение. В примере 7.5 мы установили, что данная функция имеет три особые точки $z_1=i, z_2=-i, z_3=-3$, причем z_1 и z_2 являются полюсами первого порядка, а z_3 – полюсом второго порядка. Вычеты в точках i и $-i$ найдем по формуле (8.5):

$$res_i f=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z-1)}{(z^2+1)(z+3)^2}=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z-1)}{(z-i)(z+i)(z+3)^2}=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{(z-1)}{(z+i)(z+3)^2}=\frac{i-1}{2i(i+3)^2}=\frac{i-1}{2i(-1+6i+9)}=\frac{i-1}{4(-3+4i)}=$$

$$=\frac{(i-1)(-3-4i)}{4((-3)^2+4^2)}=\frac{7+i}{100};$$

$$res_{-i} f=\lim_{z\to -i}\frac{(z+i)(z-1)}{(z-i)(z+i)(z+3)^2}=\lim_{z\to -i}\frac{z-1}{(z-i)(z+3)^2}=$$

$$=\frac{-i-1}{-2i(-i+3)^2}=\frac{i+1}{2i(-1-6i+9)}=\frac{i+1}{4(3+4i)}=\frac{(i+1)(3-4i)}{4(9+16)}=\frac{7-i}{100}.$$

Можно было получить этот результат и по формуле (8.6). Для вычисления вычета в точке $z_3=-3$ применим формулу (8.7) с $n=2$:

$$(z-z_0)^2 f(z)=\frac{(z+3)^2(z-1)}{(z^2+1)(z+3)^2}=\frac{z-1}{z^2+1},$$

$$\left((z-z_0)^2 f(z)\right)'=\left(\frac{z-1}{z^2+1}\right)'=\frac{z^2+1-2z(z-1)}{(z^2+1)^2}=\frac{-z^2+2z+1}{(z^2+1)^2},$$

$$res_{-3} f=\frac{1}{1!}\lim_{z\to -3}\frac{-z^2+2z+1}{(z^2+1)^2}=\frac{-9-6+1}{(9+1)^2}=-\frac{14}{100}.$$

Итак, $res_i f = 0{,}01(7+i)$, $res_{-i} f = 0{,}01(7-i)$, $res_{-3} f = -0{,}14$.

Пример 8.6. Найти вычет функции $\sin\dfrac{1}{z-1}$ в точке $z_0 = 1$.

Решение. В примере 7.9 мы видели, что $z_0 = 1$ является существенно особой точкой данной функции и получили лорановское разложение этой функции в проколотой окрестности точки $z_0 = 1$:

$$\sin\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z-1)^5} + \ldots.$$

Отсюда видно, что коэффициент c_{-1} при $(z-1)^{-1}$ равен 1. Следовательно, $res_1 f = 1$.

Теперь рассмотрим понятие вычета в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$. Пусть $z_0 = \infty$ – изолированная особая точка функции $f(z)$, т.е. существует проколотая окрестность $R < |z| < \infty$ этой точки, в которой $f(z)$ является аналитической. Возьмем окружность $|z| = \rho$ достаточно большого радиуса $\rho > R$. Направление обхода зададим так, чтобы при движении по этой окружности окрестность $|z| > \rho$ бесконечности оставалась слева, т.е. по часовой стрелке. (Именно такое направление обхода естественно считать положительным при движении по границе области комплексной расширенной плоскости C, содержащей бесконечно удаленную точку.) Окружность $|z| = \rho$ с обходом по часовой стрелке обозначим Γ^-. Вычетом функции $f(z)$ в точке $z_0 = \infty$ называется число

$$res_\infty f = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(z)dz. \qquad (8.8)$$

Таким образом, определение вычета в ∞ аналогично (8.1). Но связь между вычетом в бесконечности и коэффициентами лорановского разложения оказывается несколько иной, чем в случае вычетов в конечных точках.

Теорема 8.7. Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_0 = \infty$ равен коэффициенту при z^{-1} в лорановском разложении (7.6) функции $f(z)$ в проколотой окрестности точки $z_0 = \infty$, взятому со знаком минус:

$$res_{\infty} f = -c_{-1}. \qquad (8.9)$$

Доказательство. Ряды в (7.6) равномерно сходятся на окружности Γ^-, поэтому их можно почленно интегрировать:

$$\int_{\Gamma^-} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\Gamma^-} z^n dz$$

(мы объединили оба ряда из (7.6) в один). Согласно формуле (14.7) юниты 1, все интегралы в правой части равны нулю за исключением интеграла с $n = -1$, который равен

$$\int_{\Gamma^-} z^{-1}dz = -\int_{\Gamma} z^{-1}dz = -2\pi i,$$

где Γ – окружность $|z| = \rho$ с обходом против часовой стрелки. Отсюда следует, что

$$\int_{\Gamma^-} f(z)dz = -2\pi i c_{-1}, \text{ т.е. } \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(z)dz = -c_{-1}.$$

Формула (8.8) немедленно дает (8.9), что нам и требовалось.

Отметим ещё одно отличие вычета в ∞ от вычетов в конечных точках. Коэффициент c_{-1} относится к *правильной* части разложения (7.6) в проколотой окрестности ∞, а не к главной части, как в случае конечных точек. Поэтому даже если функция $f(z)$ аналитична в точке $z_0 = \infty$, ее вычет в этой точке не обязан равняться нулю (напомним, что если $f(z)$ аналитична в конечной точке z_0, то $res_{z_0} f = 0$).

Пример 8.8. Найти вычет функции $f(z) = 2 + \frac{3}{z}$ в точке $z = \infty$.

Решение. Разложением в ∞ функции $f(z)$ как раз и будет сумма

$2+\frac{3}{z}$, состоящая всего из двух членов. Коэффициент при z^{-1} равен 3. Поэтому $res_{\infty} f = -3$. В то же время данная функция является аналитической в точке $z_0 = \infty$, поскольку главная часть разложения (члены с положительными степенями z) отсутствует.

***Теорема 8.9* (о сумме вычетов).** Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$, за исключением конечного числа особых точек. Тогда сумма вычетов функции $f(z)$ во всех конечных особых точках $z_1, z_2, ..., z_n$ и вычета в бесконечности равна нулю.

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{|z| = \rho\}$ – окружность настолько большого радиуса ρ, что все конечные особые точки $z_1, ..., z_n$ находятся внутри нее. Согласно теореме 8.1 о вычетах (см. (8.2))

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f, \qquad (8.10)$$

причем Γ обходится против часовой стрелки. В силу определения вычета в бесконечности (см. (8.8))

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^-} f(z)dz = res_{\infty} f. \qquad (8.11)$$

Складывая равенства (8.11) и (8.10), получим

$$res_{\infty} f + \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f = 0, \qquad (8.12)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 8.9 бывает полезной при вычислении интегралов (подробнее об этом применении см. §9), а также при отыскании вычета в бесконечно удаленной точке.

Пример 8.10. Найти вычет функции $f(z) = \frac{z-1}{(z^2+1)(z+3)^2}$ в бесконечно удаленной точке.

Решение. 1-й способ – с помощью теоремы 8.9. Вычеты функции

в ее конечных особых точках $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = -3$ были найдены в примере 8.5: $res_i f = 0{,}01(7+i)$, $res_{-i} f = 0{,}01(7-i)$, $res_{-3} f = -0{,}14$. Применяя (8.2), получим:

$$res_\infty f + 0{,}01(7+i) + 0{,}01(7-i) - 0{,}14 = 0,$$

откуда следует $res_\infty f = 0$.

2-й способ – непосредственно с помощью лорановского разложения функции в проколотой окрестности точки $z_0 = \infty$. Как и в примере 7.11, перейдем к переменной $w = \frac{1}{z}$. Подстановка $z = \frac{1}{w}$ дает

$$G(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w^3(1-w)}{(1+w^2)(1+3w)} = w^3 h(w), \text{ где } h(w) = \frac{(1-w)}{(1+w^2)(1+3w)}.$$

Функция $h(w)$ аналитична в окрестности точки $w_0 = 0$ и, следовательно, раскладывается в ряд Тейлора в этой окрестности:

$$h(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \ldots.$$

Поэтому $G(w) = b_0 w^3 + b_1 w^4 + b_2 w^5 + \ldots$. Возвращаясь к переменной z (т.е. подставляя $w = \frac{1}{z}$), получаем вид разложения Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \infty$:

$$f(z) = \frac{b_0}{z^3} + \frac{b_1}{z^4} + \frac{b_2}{z^5} + \ldots.$$

Мы видим, что это разложение не содержит члена с z^{-1}. Значит, коэффициент при z^{-1}, а следовательно, и вычет в ∞ равны нулю.

§9. Вычисление интегралов с помощью вычетов

1. Вычисление интегралов по замкнутому контуру. Пусть функция $f(z)$ имеет внутри замкнутого контура Γ только изолированные особые точки. Тогда интеграл от $f(z)$ по контуру Γ можно найти, применяя теорему 8.1 о вычетах: вычисляя вычеты в особых

точках, находящихся внутри контура Γ, складывая эти вычеты и умножая сумму на $2\pi i$, мы и получим искомый интеграл.

Пример 9.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{z-1}{(z^2+1)(z+3)^2}dz$.

Решение. Внутри окружности $|z|=2$ находятся две особые точки функции $f(z)=\frac{z-1}{(z^2+1)(z+3)^2}$, а именно $z_1=i, z_2=-i$; третья особая точка $z_3=-3$ лежит вне этой окружности. Вычеты в точках $\pm i$ были найдены а примере 8.5: $res_i f=0{,}01(7+i), res_{-i} f=0{,}01(7-i)$. Применяя формулу (8.2), имеем

$$\int\limits_{|z|=2} f(z)=\frac{z-1}{(z^2+1)(z+3)^2}dz=2\pi i(0{,}07+0{,}01i+0{,}07-0{,}01i)=0{,}28\pi i.$$

Если функция $f(z)$ имеет в расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ только изолированные особые точки, то вместо вычисления суммы вычетов в конечных особых точках бывает проще найти вычет в бесконечно удаленной точке и воспользоваться теоремой 8.9 о сумме вычетов.

Пример 9.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2}$.

Решение. Функция $f(z)=\frac{1}{(z^8+1)^2}$ имеет восемь особых точек-решений уравнения $z^8+1=0$. Каждая из этих точек z_k является полюсом второго порядка, поскольку в окрестности точки z_k функция $f(z)$ имеет вид $f(z)=\frac{h(z)}{(z-z_k)^2}$, где $h(z)$ аналитична в окрестности точки z_k. Все особые точки лежат внутри окружности $|z|=2$. Вычисление

вычетов во всех этих точках весьма трудоемко. Но к данной функции применима теорема 8.9, которая дает

$$res_{\infty} f + \sum_{k=1}^{8} res_{z_k} f = 0. \qquad (9.1)$$

Поэтому достаточно найти вычет в точке $z_0 = \infty$. Перейдем к переменной $w = \frac{1}{z}$. Подставляя $z = \frac{1}{w}$, получим

$$G(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{w^{16}}{(1+w^8)^2} = w^{16} h(w), \text{ где } h(w) = \frac{1}{(1+w^8)^2}.$$

Функция $h(w)$ аналитична в окрестности точки $w_0 = 0$. Поэтому

$$h(w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \ldots, \; G(w) = b_0 w^{16} + b_1 w^{17} + b_2 w^{18} + \ldots.$$

Значит, разложение Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0 = \infty$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{b_0}{z^{16}} + \frac{b_1}{z^{17}} + \frac{b_2}{z^{18}} + \ldots.$$

Так как коэффициент при z^{-1} равен нулю, то $res_{\infty} f = 0$. Из (8.2) и (9.1) получаем

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^8+1)^2} = 2\pi i \sum_{k=1}^{8} res_{z_k} f = 0.$$

2. Вычисление интегралов вида $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi) d\varphi$, где R – рациональная функция от $\cos\varphi, \sin\varphi$. Такие интегралы возникают в ряде приложений (например, при решении краевых задач). Они сводятся к интегралам, рассмотренным в предыдущем пункте, с помощью замены переменной $z = e^{i\varphi}$. Тогда $dz = e^{i\varphi} \cdot id\varphi = zid\varphi$, откуда

$$d\varphi = \frac{dz}{iz} = -\frac{idz}{z},$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),$$

$$\sin\varphi=\frac{1}{2i}(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

(мы воспользовались формулой (12.2) юниты 1). При изменении φ от 0 до 2π точка z описывает окружность $|z|=1$. Поэтому после перехода к переменной z мы получим интеграл по единичной окружности от функции, представимой в виде отношения двух многочленов (такие функции называются рациональными дробями или дробно-рациональными функциями).

Пример 9.3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}$, $|a|<1$.

Р е ш е н и е. Выполняя указанные выше подстановки, получим, что данный интеграл равен

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{idz}{-z\left(1-2a\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2\right)}=\int\limits_{|z|=1}\frac{idz}{az^2-(a^2+1)z+a}.$$

Разложим знаменатель на множители, для чего найдем корни уравнения $az^2-(a^2+1)z+a=0$. Дискриминант $D=(a^2+1)^2-4a^2=$ $=a^4+2a^2+1-4a^2=a^4-2a^2+1=(a^2-1)^2$, откуда

$$z_1=\frac{a^2+1+(a^2-1)}{2a}=a,\ z_2=\frac{a^2+1-(a^2-1)}{2a}=\frac{1}{a}.$$

Поэтому

$$f(z)=\frac{i}{az^2-(a^2+1)z+a}=\frac{i}{a(z-a)(z-1/a)}.$$

Следовательно, подынтегральная функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=a$ и $z_2=1/a$, каждая из которых является полюсом первого порядка. Так как по условию $|a|<1$, то z_1 лежит внутри окружности $|z|=1$,

а z_2 – вне ее. По теореме 8.1

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{idz}{az^2-(a^2+1)z+a} = 2\pi i \cdot res_a f .$$

Для вычисления вычета в точке $z_1 = a$ можно воспользоваться любой из формул (8.5), (8.6). Применим, например, формулу (8.6). Здесь

$$\psi(z) = az^2-(a^2+1)z+a,\ \psi'(z) = 2az-(a^2+1),$$

$$res_a f = \frac{i}{2a\cdot a-(a^2+1)} = \frac{i}{a^2-1}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2} = 2\pi i \frac{i}{a^2-1} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

3. Вычисление несобственных интегралов. Пусть $f(x)$ – функция, заданная на всей оси Ox. Рассмотрим вычисление несобственных интегралов $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, определяемых следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)dx. \qquad (9.2)$$

Интеграл, определенный равенством (9.2), называется *несобственным интегралом в смысле главного значения*. Если предел в (9.2) существует, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся*; если предел не существует, то *расходящимся*. Если сходится каждый из интегралов $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{0} f(x)dx$ и $\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{0}^{R} f(x)dx$ (т.е. существуют оба соответствующих предела), то несобственный интеграл в (9.2) также сходится и равен сумме этих интегралов. Но обратное

неверно: из сходимости $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ в смысле главного значения (т.е. из существования предела в (9.2)) не следует сходимость интегралов $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ и $\int_{0}^{\infty} f(x)dx$. Например, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ сходится в смысле главного значения и равен нулю, поскольку $\int_{-R}^{R} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_{-R}^{R} = 0$ для любого $R>0$. В то же время каждый из интегралов $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}dx$ и $\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$ расходится.

Вычисление многих несобственных интегралов $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ (в смысле главного значения) основывается на следующей теореме.

Теорема 9.4. Пусть функция $f(x)$, $x \in (-\infty;+\infty)$ удовлетворяет следующим двум условиям: 1) функция $f(z)$, получаемая заменой x комплексным переменным z, имеет в комплексной плоскости C лишь изолированные особые точки, причем ни одна из них не лежит на оси Ox; 2) если $\gamma(R)$ – полуокружность радиуса R с центром в начале координат, лежащая в верхней (либо в нижней) полуплоскости, то

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma(R)} f(z)dz = 0. \qquad (9.3)$$

Тогда интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ равен сумме вычетов функции $f(z)$ в особых точках, лежащих в верхней полуплоскости, умноженной на $2\pi i$ (соответственно равен сумме вычетов в особых точках из нижней полуплоскости, умноженной на $-2\pi i$).

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда полуокружность $\gamma(R)$ лежит в верхней полуплоскости. Возьмем замкнутый контур Γ, состоящий из отрезка $[-R,R]$ и полуокружности $\gamma(R)$, с обходом против часовой стрелки (рис.9). По теореме 8.1

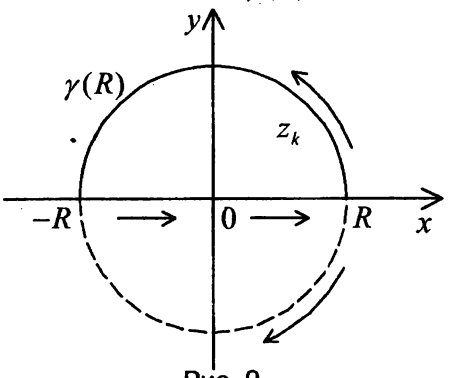


Рис. 9

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{\gamma(R)} f(z)dz =$$

$$= \int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum res_{z_k} f,$$

где сумма распространяется на все особые точки z_k, лежащие внутри контура Γ. Перейдем к пределу при $R \to \infty$. Пользуясь равенствами (9.2) и (9.3), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k} res_{z_k} f, \qquad (9.4)$$

где сумма берется по всем особым точкам из верхней полуплоскости.

Если полуокружность $\gamma(R)$ лежит в нижней полуплоскости, то соответствующий контур Γ^- будет обходиться по часовой стрелке (такое направление возникает оттого, что отрезок $[-R,R]$ в любом случае должен проходиться слева направо, т.е. в направлении возрастания x). Поэтому в правой части (9.4) добавится знак минус.

Пример 9.5. Вычислить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2} dx$.

Решение. В данном случае $f(z) = \frac{z^2+4}{(z^2+9)^2}$. Проверим справедливость условия (9.3).

$$f(z)=\frac{z^2\left(1+\dfrac{4}{z^2}\right)}{z^4\left(1+\dfrac{9}{z^2}\right)^2}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1+\dfrac{4}{z^2}}{\left(1+\dfrac{9}{z^2}\right)^2}=\frac{1}{z^2}h(z),$$

где $h(z)=\dfrac{1+\dfrac{4}{z^2}}{\left(1+\dfrac{9}{z^2}\right)^2}$. Так как $\lim\limits_{z\to\infty}h(z)=1$, то при достаточно больших значениях $|z|$ будет $h(z)<2$. Поэтому $|f(z)|=\dfrac{|h(z)|}{|z|^2}<\dfrac{2}{|z|^2}$.

Следовательно,

$$\left|\int_{\gamma(R)}f(z)dz\right|\le\int_{\gamma(R)}|f(z)|\cdot|dz|\le\int_{\gamma(R)}\frac{2}{R^2}\cdot|dz|=\frac{2}{R^2}\cdot\pi R=\frac{2\pi}{R}$$

(здесь $\int\limits_{\gamma(R)}|dz|=\pi R$ – длина полуокружности $\gamma(R)$). Переходя к пределу при $R\to\infty$, получим (9.3). Проведенные оценки справедливы как для верхней, так и для нижней полуокружности. Поэтому в качестве $\gamma(R)$ можно выбрать любую из них. Пусть $\gamma(R)$ – верхняя полуокружность. Так как

$$f(z)=\frac{z^2+4}{(z^2+9)^2}=\frac{z^2+4}{(z+3i)^2(z-3i)^2},$$

то $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=3i$, $z_2=-3i$, являющиеся полюсами второго порядка. Из них в верхней полуплоскости находится только $z_1=3i$. Вычет в этой точке найдем по формуле (8.7) с $n=2$:

$$(z-z_0)^n f(z)=\frac{(z-3i)^2(z^2+4)}{(z+3i)^2(z-3i)^2}=\frac{z^2+4}{(z+3i)^2},$$

$$\left((z-z_0)^n f(z)\right)' = \left(\frac{z^2+4}{(z+3i)^2}\right)' = \frac{2z(z+3i)^2 - 2(z+3i)(z^2+4)}{(z+3i)^4} =$$

$$= \frac{2(z+3i)(3iz-4)}{(z+3i)^4} = \frac{2(3iz-4)}{(z+3i)^3},$$

$$res_{3i} f = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 3i} \frac{2(3iz-4)}{(z+3i)^3} = \frac{2(3i\cdot 3i-4)}{(3i+3i)^3} = \frac{2(-9-4)}{6^3 i^3} = \frac{13}{108i}.$$

По формуле (9.4) получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}\,dx = 2\pi i\ res_{3i} f = 2\pi i \frac{13}{108i} = \frac{13\pi}{54}.$$

Рассуждение, проведенное нами в примере 9.5 для проверки условия (9.3), без изменения сохраняется для любой функции $f(z)$, представимой в виде отношения двух многочленов (т.е. рациональной дроби), если степень знаменателя на две и более единицы превосходит степень числителя. (В примере 9.5 степень числителя 2, а степень знаменателя 4.) Следующая теорема показывает, что условию (9.3) удовлетворяет и другой важный класс функций, интегралы от которых возникают, например, в операционном исчислении (см. главу 3).

***Теорема 9.6* (лемма Жордана).** Пусть функция $F(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq -a$, за исключением конечного числа изолированных особых точек, и $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$. Если $\gamma(R)$ – дуга окружности $|z| = R$, расположенная в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq -a$, то

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma(R)} e^{itz} F(z)\,dz = 0 \text{ для всех } t > 0. \qquad (9.5)$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $a > 0$. Обозначим через $M(R)$ максимум $|F(z)|$ на дуге $\gamma(R)$. Поскольку $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$, то $\lim\limits_{R\to\infty} M(R) = 0$. Разобьем $\gamma(R)$ на три части $\gamma_1(R)$, $\gamma_2(R)$ и $\gamma_3(R)$ (рис.10): дуги $\gamma_1(R)$ и $\gamma_2(R)$ заключены между прямой

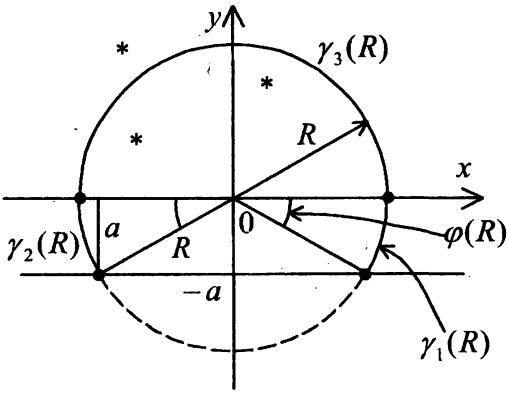


Рис. 10

$y=-a$ и осью Ox, а $\gamma_3(R)$ является полу-окружностью, лежащей в полу-плоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$. Очевидно, интеграл по $\gamma(R)$ равен сумме интегралов по этим трем дугам; оценим каждый из них в отдельности. В точках $z=x+iy$ дуг $\gamma_1(R)$ и $\gamma_2(R)$ будет $-y<a$. Поэтому

$$\left|e^{itz}\right|=\left|e^{it(x+iy)}\right|=\left|e^{itx}\cdot e^{-ty}\right|=e^{-ty}<e^{ta}.$$

Обозначим через $l(R)$ длины, а через $\varphi(R)$ – центральные углы дуг $\gamma_1(R)$ и $\gamma_2(R)$ (в радианах). Легко видеть (см. рис.10), что $\sin\varphi(R)=\dfrac{a}{R}$, откуда $\varphi(R)=\arcsin\dfrac{a}{R}$. Поэтому $l(R)=R\varphi(R)=$

$=R\arcsin\dfrac{a}{R}$. Отсюда получаем:

$$\left|\int_{\gamma_1(R)} e^{itz}F(z)dz\right| \leq \int_{\gamma_1(R)}\left|e^{itz}\right|\cdot\left|F(z)\right|\cdot\left|dz\right| \leq e^{ta}M(R)\int_{\gamma_1(R)}\left|dz\right|=$$

$$=e^{ta}M(R)l(R)=e^{ta}M(R)R\arcsin\frac{a}{R};$$

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_1(R)} e^{itz}F(z)dz\right| \leq e^{ta}\lim_{R\to\infty}M(R)\cdot\lim_{R\to\infty}R\arcsin\frac{a}{R}=e^{ta}\cdot 0\cdot a=0$$

(равенство $\lim\limits_{R\to\infty}R\arcsin\dfrac{a}{R}=a$ можно получить, например, заменяя $\arcsin\dfrac{a}{R}$ на эквивалентную величину $\dfrac{a}{R}$). В точности те же оценки

справедливы и для $\gamma_2(R)$. Осталось рассмотреть $\gamma_3(R)$.

Для точек $z \in \gamma_3(R)$ имеем $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $|dz| = Rd\varphi$, $0 \quad \varphi \quad \pi$, $\left|e^{itz}\right| = \left|e^{itR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\right| = \left|e^{itR\cos\varphi} \cdot e^{-tR\sin\varphi}\right| = e^{-tR\sin\varphi}$.

Отсюда

$$\left|\int_{\gamma_3(R)} e^{itz}F(z)dz\right| \le \int_{\gamma_3(R)} \left|e^{itz}\right| \cdot |F(z)| \cdot |dz| \le M(R)\int_0^{\pi} e^{-tR\sin\varphi} Rd\varphi.$$

Заметим, что $\int_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\varphi}d\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-tR\sin\varphi}d\varphi$; этот факт легко доказать, например, с помощью замены переменной $\alpha = \pi - \varphi$. Поэтому

$$\left|\int_{\gamma_3(R)} e^{itz}F(z)dz\right| \le 2M(R)R\int_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\varphi}d\varphi. \qquad (9.6)$$

На участке $[0;\pi/2]$ график синуса лежит выше отрезка прямой $y = \frac{2}{\pi}x$, соединяющей точки $(0,0)$ и $(\pi/2,1)$ этого графика. Следовательно, $\sin\varphi \ge \frac{2}{\pi}\varphi$, $\varphi \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Отсюда получаем

$$\int_0^{\pi/2} e^{-tR\sin\varphi}d\varphi \le \int_0^{\pi/2} e^{-tR2/\pi\varphi}d\varphi = -\frac{\pi}{2tR}e^{-2tR/\pi\varphi}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2tR}(1-e^{-tR}).$$

Объединяя эту оценку с (9.6) и переходя к пределу при $R \to \infty$, имеем

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\gamma_3(R)} e^{itz}F(z)dz\right| \le \lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{t}M(R)(1-e^{-tR}) = \frac{\pi}{t}\cdot 0\cdot 1 = 0.$$

Таким образом, в случае $a > 0$ теорема доказана. Если $a \le 0$, то дуга $\gamma(R)$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Im} z \ge 0$ и является частью дуги $\gamma_3(R)$;

части $\gamma_1(R)$ и $\gamma_2(R)$ в этом случае отсутствуют. Для $\gamma(R)$ справедливы рассуждения, проведенные выше для $\gamma_3(R)$, и теорема 9.6 полностью доказана.

Смысл теоремы 9.6 состоит в том, что функция $F(z)$ может стремиться к нулю сколь угодно медленно (заметим, что в примере 9.5 убывание функции $|f(z)|$ было достаточно быстрым – как $|z|^{-2}$). Но умножение на e^{itz} обеспечивает стремление интеграла по $\gamma(R)$ к нулю.

Замечание. Для случая $t<0$ справедливо утверждение, аналогичное теореме 9.5, если в качестве $\gamma(R)$ взять дугу окружности $|z|=R$, лежащую в полуплоскости $\operatorname{Im} z \leq -a$ (на рис.10 показана пунктиром). Доказательство в этом случае аналогично приведенному выше для $t>0$. В случае $t=0$ теорема 9.6 неверна.

Пример 9.7. Вычислить интегралы $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\cos 2x}{x^2+9}dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx$.

Решение. Возьмем вспомогательную функцию $f(z)=\frac{ze^{2iz}}{z^2+9}$. При $z=x$ $f(x)=\frac{xe^{2ix}}{x^2+9}=\frac{x(\cos 2x+i\sin 2x)}{x^2+9}=\frac{x\cos 2x}{x^2+9}+i\frac{\sin 2x}{x^2+9}$. Таким образом, действительная и мнимая части функции $f(x)$ и есть те функции, интегралы от которых нужно найти. Поэтому если мы вычислим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{2ix}}{x^2+9}dx$ и возьмем от него действительную и мнимую части, то получим искомые величины.

Функция $F(z)=\frac{z}{z^2+9}$ удовлетворяет условиям теоремы 9.6: она имеет только две особые точки $z_{1,2}=\pm 3i$ и $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z}{z^2+9}=0$. Если $\gamma(R)$ –

дуга окружности $|z|=R$, расположенная в полуплоскости $\operatorname{Im} z \geq 0$, то согласно теореме 9.6

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma(R)}\frac{ze^{2iz}}{z^2+9}dz=0$$

(мы взяли в (9.5) $t=2$). Значит, можно применить теорему 9.4, по которой интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{2ix}}{x^2+9}dx$ равен сумме вычетов функции $f(z)=\frac{ze^{2iz}}{z^2+9}$ в особых точках из верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, умноженной на $2\pi i$. В полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ лежит единственная особая точка $z_1=3i$ функции $f(z)$. Так как $f(z)=\frac{ze^{2iz}}{(z-3i)(z+3i)}$, то $z_1=3i$ – полюс первого порядка. Вычет в этой точке можно найти по формуле (8.5) либо (8.6). Применим (8.6). Здесь $\psi(z)=z^2+9$, $\psi'(z)=2z$, $res_{3i}f=\frac{3ie^{2i\cdot 3i}}{2\cdot 3i}=\frac{1}{2}e^{-6}$;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{2ix}}{x^2+9}dx=2\pi i\cdot\frac{1}{2}e^{-6}=i\pi e^{-6}.$$

Действительная и мнимая части полученного числа и будут искомыми интегралами:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos 2x}{x^2+9}dx=0,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin 2x}{x^2+9}dx=\pi e^{-6}.$$

(Заметим, что равенство нулю первого из этих интегралов непосредственно следует из того, что он является интегралом от нечетной функции по интервалу, симметричному относительно начала координат.)

§10. Логарифмические вычеты и принцип аргумента

Рассмотрим многозначную функцию $\operatorname{Ln} f(z)=\ln|f(z)|+i\operatorname{Arg} f(z)=$ $=\ln|f(z)|+i(\arg f(z)+2\pi k)$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$. Во всех точках z, в которых

$f(z)$ аналитична и не обращается в нуль, $\mathrm{Ln} f(z)$ будет многозначной аналитической функцией; каждая ее ветвь, получаемая выбором конкретного значения k, является однозначной аналитической функцией в некоторой окрестности точки z. Эти ветви отличаются на постоянное слагаемое, и их производные совпадают. Производная функции $\mathrm{Ln} f(z)$

$$\left(\mathrm{Ln} f(z)\right)' = \frac{1}{f(z)} \cdot f'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

называется *логарифмической производной* функции $f(z)$; она является однозначной аналитической функцией всюду, за исключением особых точек и нулей функции $f(z)$. Вычет функции $f'(z)/f(z)$ (т.е. вычет логарифмической производной функции $f(z)$ в точке z_0) называется **логарифмическим вычетом функции $f(z)$ в точке z_0.**

Теорема 10.1. Если z_0 – нуль кратности n аналитической функции $f(z)$, то логарифмический вычет функции $f(z)$ в точке z_0 равен n; если z_0 – полюс порядка p, то логарифмический вычет равен $-p$.

Доказательство. Пусть z_0 – нуль кратности n. Тогда $f(z)$ представима в виде (см. (5.2)) $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ – аналитическая функция в некоторой окрестности точки z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$. Отсюда:

$$f'(z) = \left((z - z_0)^n \varphi(z)\right)' = n(z - z_0)^{n-1} \varphi(z) + (z - z_0)^n \varphi'(z),$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n(z - z_0)^{n-1} \varphi(z) + (z - z_0)^n \varphi'(z)}{(z - z_0)^n \varphi(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Так как $\varphi(z_0) \neq 0$, то функция $\varphi'(z)/\varphi(z)$ является аналитической в некоторой окрестности точки z_0 и, следовательно, раскладывается в этой окрестности в ряд Тейлора: $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. Поэтому главная

часть лорановского разложения функции $f'(z)/f(z)$ состоит из единственного члена $\dfrac{n}{z-z_0}$; коэффициент c_{-1} при $(z-z_0)^{-1}$ равен n. Поэтому (см. (8.4))

$$res_{z_0}\frac{f'}{f}=c_{-1}=n.$$

Пусть теперь z_0 – полюс функции $f(z)$ порядка p. Тогда функция $g(z)=1/f(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка p. Согласно доказанному выше, $res_{z_0}\dfrac{g'}{g}=p$. Но $\operatorname{Ln}g=\operatorname{Ln}\dfrac{1}{f}=-\operatorname{Ln}f$,

$\dfrac{g'}{g}=(\operatorname{Ln}g)'=-(\operatorname{Ln}f)'=-\dfrac{f'}{f}$. Отсюда и из определения вычета (8.1) получаем

$$res_{z_0}\frac{f'}{f}=res_{z_0}\left(-\frac{g'}{g}\right)=-res_{z_0}\frac{g'}{g}=-p,$$

что и требовалось доказать.

В следующих далее теоремах будет установлена связь между количеством нулей и полюсов функции $f(z)$ внутри области и поведением $f(z)$ на границе области. При подсчете количества нулей и полюсов мы примем следующее соглашение: *каждый нуль и полюс считается столько раз, каков его порядок.*

Теорема 10.2 **(теорема о логарифмическом вычете).** Пусть Γ – замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$. Пусть, далее, $f(z)$ аналитична во всех точках внутри Γ, за исключением конечного числа полюсов, и не имеет на Γ ни нулей, ни полюсов. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P, \qquad (10.1)$$

где N – число нулей, а P – число полюсов функции $f(z)$ внутри Γ, подсчитанных с учетом кратности; обход контура Γ предполагается

таким, что его внутренние точки остаются слева.

Доказательство. Обозначим $G(z)=\dfrac{f'(z)}{f(z)}$. Поскольку на Γ функция $f(z)$ не имеет ни нулей, ни полюсов, то функция $G(z)$ аналитична во всех точках контура Γ. Внутри Γ функция $G(z)$ имеет лишь конечное число особых точек, являющихся нулями и полюсами функции $f(z)$. Значит, к функции $G(z)$ применима теорема 8.1 о вычетах, согласно которой

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{k=1}^{l}res_{a_k}\frac{f'}{f}+\sum_{k=1}^{m}res_{b_k}\frac{f'}{f}, \qquad (10.2)$$

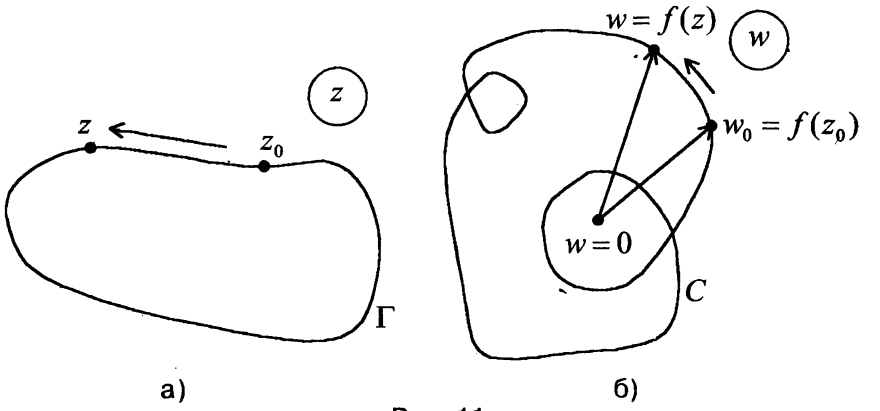
где a_k, $k=1,2,...,l$, и b_k, $k=1,2,...,m$, – нули и полюсы функции $G(z)$ соответственно. В силу теоремы 10.1 $res_{a_k}\dfrac{f'}{f}=n_k$, $res_{b_k}\dfrac{f'}{f}=-p_k$, где n_k и p_k – соответственно порядки нуля a_k и полюса b_k. Подсчитывая нули и полюсы с учетом кратности, получим

$$\sum_{k=1}^{l}res_{a_k}\frac{f'}{f}=\sum_{k=1}^{l}n_k=N,\ \sum_{k=1}^{m}res_{b_k}\frac{f'}{f}=-\sum_{k=1}^{m}p_k=-P.$$

Подставляя эти равенства в (10.2), приходим к соотношению (10.1), что нам и требовалось.

Величина в левой части (10.1) называется логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно контура Γ; этим и объясняется название теоремы 10.2. Мы покажем, что эта величина имеет геометрический смысл и, следовательно, теорема 10.2 выражает определенное геометрическое свойство отображения, реализуемого функцией $w=f(z)$.

Зафиксируем на Γ произвольную точку z_0 (рис. 11,а). Ей соответствует точка $w_0=f(z_0)$ плоскости переменного w (рис. 11,б). Если точка z движется по Γ, начиная от z_0, то соответствующая точка $w=f(z)$ будет описывать некоторую траекторию C в плоскости w,



а) б)

Рис. 11

начиная от точки w_0. При возвращении точки z в z_0 точка w придет в w_0. Поэтому путь C также является замкнутым (хотя, возможно, будет иметь самопересечения). Возьмем $\ln w_0 = \ln|w_0| + i \arg w_0$ – главное значение логарифма числа w_0. Каждой точке $w \in C$ соответствует бесконечно много значений аргумента $\operatorname{Arg} w = \arg w + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Но мы выберем такое из них, чтобы при движении по C аргумент числа w менялся непрерывно. Это значение аргумента обозначим $\varphi(w)$. При возвращении в w_0 после обхода пути C значение $\varphi(w)$ будет приближаться к некоторому числу $\varphi(w_0)$, которое не обязано совпадать с исходным значением $\arg w_0$. Таким образом, при обходе C аргумент числа $w = f(z)$ получит некоторое приращение $\Delta_\Gamma \arg f = \varphi(w_0) - \arg w_0$. Это приращение, очевидно, равно числу оборотов вокруг точки $w = 0$, которое сделает вектор w при обходе точкой w пути C, умноженному на 2π (при каждом обороте аргумент изменяется на 2π). На рис.11,б число оборотов равно 2.

Теорема 10.3 **(принцип аргумента).** Пусть Γ – замкнутый контур, лежащий в области аналитичности функции $f(z)$. Пусть, далее, $f(z)$ аналитична во всех точках внутри Γ, за исключением конечного числа

полюсов, и не имеет на Γ ни нулей, ни полюсов. Тогда приращение аргумента числа $w=f(z)$ при обходе точкой z контура Γ равно $2\pi(N-P)$:

$$\Delta_\Gamma \arg f = 2\pi(N-P), \qquad (10.3)$$

где N и P – число нулей и полюсов функции $f(z)$ внутри Γ, взятых с учетом кратности. Другими словами, число оборотов вектора $f(z)$, сделанных им при обходе точкой z контура Γ, равно $N-P$.

Доказательство. Пусть, как и выше, $\varphi(w)$ – непрерывно изменяющийся аргумент числа w. Рассмотрим функцию $\Phi(z)=\ln|f(z)|+i\varphi(f(z))$. В окрестности каждой точки $z\in\Gamma$ функция $\Phi(z)$ совпадает с одной из ветвей многозначной аналитической функции $\mathrm{Ln}f(z)=\ln|f(z)|+i(\arg f(z)+2\pi k)$. Поэтому

$$\Phi'(z)=\left(\mathrm{Ln}f(z)\right)'=\frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Следовательно, непрерывная на Γ функция $\Phi(z)$ является первообразной функции $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=\Delta\Phi(z), \qquad (10.4)$$

где $\Delta\Phi$ – приращение функции $\Phi(z)=\ln|f(z)|+i\varphi(f(z))$ при полном обходе точкой z контура Γ. Поскольку $\ln|f(z)|$ является однозначной непрерывной функцией на Γ, то при возвращении точки z в z_0 он примет начальное значение $\ln|f(z_0)|$ и его приращение будет равно нулю. Когда z проходит контур Γ, соответствующая точка $w=f(z)$ проходит путь C. Поэтому приращение этой функции $\Delta\varphi=\varphi(w_0)-\arg w_0=\Delta_\Gamma \arg f$. Таким образом, $\Delta\Phi(z)=i\Delta_\Gamma \arg f$. Из

(10.4) и (10.1) получаем

$$\Delta_\Gamma \arg f = \frac{1}{i}\Delta\Phi(z) = \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{i}\cdot 2\pi i(N-P) = 2\pi(N-P),$$

что и требовалось доказать.

Пусть, например, Γ – достаточно малая окружность, охватывающая нуль функции $f(z)$ кратности n. Тогда $N=n, P=0$. Согласно теореме 10.3, при однократном обходе точкой z окружности Γ вектор $f(z)$ совершит n оборотов вокруг начала координат против часовой стрелки. Если же Γ охватывает полюс порядка p (т.е. $N=0, P=p$), то вектор $f(z)$ совершит p оборотов по часовой стрелке.

Полезным применением признака аргумента является следующая теорема.

Теорема 10.4 **(теорема Руше).** Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны во всех точках замкнутого контура Γ и внутри него и $|f(z)|>|g(z)|$ на Γ. Тогда их сумма $F(z)=f(z)+g(z)$ имеет внутри Γ столько же нулей с учетом их кратности, что и $f(z)$.

Доказательство. Покажем вначале, что функции $f(z)$ и $F(z)$ не имеют нулей на Γ. Для любых комплексных чисел a и b справедливо неравенство $|a+b|\ge|a|-|b|$ (оно следует из неравенства треугольника: $|a|=|a+b-b|\le|a+b|+|-b|=$ $=|a+b|+|b|$, откуда $|a+b|\ge$ $\ge|a|-|b|$). Используя это неравенство и условие теоремы, получим $|f(z)|>|g(z)|\ge 0$, $|F(z)|=|f(z)+g(z)|\ge|f(z)|-|g(z)|>0$ для всех $z\in\Gamma$. Значит, $f(z)$ и $F(z)$ не обращаются в нуль на Γ и к ним можно применить принцип

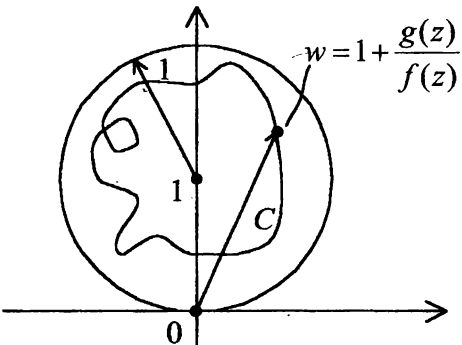


Рис. 12

аргумента. Так как $f(z) \neq 0$ на Γ, то $f(z)+g(z)=f(z)\left(1+\dfrac{g(z)}{f(z)}\right)$. При умножении комплексных чисел их аргументы складываются. Отсюда следует, что

$$\Delta_\Gamma \arg(f+g)=\Delta_\Gamma \arg f+\Delta_\Gamma \arg\left(1+\frac{g}{f}\right).$$

По условию теоремы, $\left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right|<1$ для всех точек $z\in\Gamma$. Поэтому если обозначить $w(z)=1+\dfrac{g(z)}{f(z)}$, то $|w-1|=\left|\dfrac{g(z)}{f(z)}\right|<1$. При обходе точкой z контура Γ точка w будет двигаться по замкнутой траектории, лежащей внутри круга $|w-1|<1$ (рис.12). Следовательно, вектор w не сделает ни одного оборота вокруг точки $w=0$; аргумент $\varphi(w)$ числа w вернется к начальному значению, и его приращение $\Delta_\Gamma \arg\left(1+\dfrac{g}{f}\right)=0$.

Итак, $\Delta_\Gamma \arg(f+g)=\Delta_\Gamma \arg f$. Применяя к каждой из функций $f+g$ и f равенство (10.3) с $P=0$ (функции аналитичны, и полюсов нет), приходим к тому, что эти функции имеют внутри Γ одинаковое число нулей. Теорема Руше доказана.

Теорема 10.4 иногда позволяет определить число нулей функции в заданной области.

Пример 10.5. Определить число корней уравнения $z^8-4z^5+z^2-1=0$ в круге $|z|<1$.

Решение. Возьмем $f(z)=-4z^5$; $g(z)=z^8+z^2-1$. В точках окружности $|z|=1$ имеем $|f(z)|=|-4z^5|=4$, $|g(z)|=|z^8+z^2-1|\le|z^8|+$ $+|z^2|+|-1|=3$. Таким образом, $|f(z)|>|g(z)|$ на окружности $\Gamma=\{|z|=1\}$.

По теореме Руше функция $f(z)+g(z)=z^8-4z^5+z^2-1$ имеет в круге $|z|<1$ столько же нулей, сколько и функция $f(z)=-4z^5$. Но $f(z)$ обращается в нуль только в точке $z=0$, являющейся нулем функции $f(z)$ пятого порядка. Следовательно, и функция $f(z)+g(z)$ имеет в круге $|z|<1$ пять нулей (с учетом кратности).

Важным применением теоремы Руше является простое доказательство с ее помощью так называемой основной теоремы алгебры.

Теорема 10.6 **(основная теорема алгебры).** Любой многочлен n-й степени $P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...+a_n \quad (a_0\neq 0)$ имеет в плоскости C комплексного переменного z в точности n нулей с учетом их кратности.

Доказательство. Запишем $P_n(z)$ в виде $P_n(z)=f(z)+g(z)$, где $f(z)=a_0z^n$, $g(z)=a_1z^{n-1}+...+a_n$. Так как

$$\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{g(z)}=\lim_{z\to\infty}\frac{a_0z^n}{a_1z^{n-1}+...+a_n}=\lim_{z\to\infty}\frac{a_0}{\frac{a_1}{z}+...+\frac{a_n}{z^n}}=\infty,$$

то найдётся такое $R_0>0$, что при $|z|\geq R_0$ будет $\left|\frac{f(z)}{g(z)}\right|\geq 2$. Возьмем произвольное $R>R_0$. Тогда при $|z|=R$ получим $|f(z)|\geq 2|g(z)|>|g(z)|$. По теореме Руше $P_n(z)$ имеет в круге $|z|<R$ столько же нулей, сколько и функция $f(z)=a_0z^n$, а последняя имеет нуль кратности n в начале координат. Таким образом, в любом круге $|z|<R$ сколь угодно большого радиуса $R>R_0$ многочлен $P_n(z)$ имеет ровно n нулей. Значит, и во всей комплексной плоскости C их будет в точности n.

ГЛАВА III. ОСНОВЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Опишем вначале в общих чертах, в чем состоит операционное исчисление и на чем основаны его применения. Вводится правило, по которому каждой функции $f(t)$ действительного переменного t, принадлежащей достаточно широкому классу функций, ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексного переменного p. Это правило называется преобразованием, или оператором. Исходная функция $f(t)$ называется оригиналом, а соответствующая ей функция $F(p)$ – ее изображением. Каждому изменению оригинала соответствует то или иное изменение изображения. Оказывается, что введенное преобразование обладает следующим важным свойством, на котором и основаны его применения: действия над изображениями получаются значительно проще, чем действия, произведенные над оригиналами. Например, дифференцированию оригинала соответствует умножение изображения на переменное p, интегрированию – деление на p и т.д.

Пусть, например, требуется найти функцию $y(t)$ из некоторого уравнения, содержащего эту функцию под знаками производных и интегралов. Операционный метод решения задачи сводится к следующим этапам: 1) от искомой функции $y(t)$ переходят к ее изображению $Y(p)$; 2) над изображениями производят операции, соответствующие заданным операциям над $y(t)$. При этом получается уравнение относительно функции $Y(p)$ (так называемое операторное уравнение), которое оказывается проще исходного уравнения относительно $y(t)$. Например, дифференциальному уравнению соответствует алгебраическое уравнение и т.д.; 3) полученное операторное уравнение решают относительно $Y(p)$; 4) от найденного изображения $Y(p)$ переходят к оригиналу $y(t)$, который и является искомой функцией.

Еще в XIX в. начало развиваться так называемое символическое исчисление, в котором n-я производная функции $y(t)$ рассматривалась как действие на y формального символа p^n (в современном понимании p – аргумент изображения $Y(p)$). Такой подход оказался

довольно удобным для решения ряда задач, связанных с линейными дифференциальными уравнениями. Распространению и развитию этого метода в большой мере способствовал английский инженер и физик О.Хевисайд (1850-1925), успешно использовавший символическое исчисление для решения задач электротехники. Но формальные правила действий над символами не имели надлежащего математического обоснования. Соответствующая теория была построена лишь в трудах ряда математиков XX в.

§11. Преобразование Лапласа

Пусть функция $f(t)$ действительного переменного t определена при всех $t \in (-\infty;+\infty)$; значения функции $f(t)$ могут быть как действительными, так и комплексными (в рассмотренных далее приложениях они действительные). Функция $f(t)$ называется **кусочно-дифференцируемой**, если она дифференцируема всюду, кроме, быть может, точек разрыва первого рода (т.е. разрывов с конечным скачком), причем на каждом конечном интервале оси t содержится лишь конечное число таких точек.

Функция $f(t)$, определенная при всех $t \in (-\infty;+\infty)$, называется **функцией-оригиналом**, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

2) функция $f(t)$ кусочно-дифференцируема;

3) существуют такие действительные числа $M > 0$ и σ, что для всех t выполняется неравенство

$$|f(t)| \le Me^{\sigma t}. \qquad (11.1)$$

Условие 1 не очень ограничительно для приложений. Например, если функция $f(t)$ описывает некоторый физический процесс и t интерпретируется как время, то существенным, как правило, является ход процесса, начиная с некоторого момента времени t_0 (который можно считать равным нулю); значения $f(t)$ при $t < t_0$ можно выбрать произвольно, в частности, положить $f(t) = 0$. Условие 3 означает, что функция $f(t)$ растет "не очень быстро" при $t \to +\infty$ – не быстрее

показательной функции. Это условие также не является очень ограничительным; ему удовлетворяет широкий класс функций. Например, функции $\sin t$, $\cos t$, t^n при любом n, e^{at} при любом a и $\sigma = a$ удовлетворяют условию (11.1) при $t > 0$. (Пример функции, не удовлетворяющей этому условию: $f(t) = e^{t^2}$.)

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая *единичная функция*, или *функция Хевисайда*

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \qquad (11.2)$$

Очевидно, $h(t)$ удовлетворяет условию (11.1) с $\sigma = 0$ (как и всякая ограниченная функция-оригинал). Умножение произвольной функции $\varphi(t)$ на $h(t)$ оставляет $\varphi(t)$ без изменений при $t \quad 0$ и дает 0 при $t < 0$. Поэтому если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 2, 3 и не удовлетворяет условию 1, то после умножения на $h(t)$ получается функция $f(t) = h(t)\varphi(t)$, удовлетворяющая всем трем условиям, т.е. функция-оригинал. Например, $h(t)\sin \omega t$, $h(t)t^n$, $h(t)e^{at}$ будут функциями-оригиналами. Для простоты записи будем, как правило, опускать множитель $h(t)$, условившись, что все функции, которые мы будем рассматривать как функции-оригиналы, равны нулю для отрицательных t. Например, вместо $h(t)$ будем писать 1, вместо $h(t)\sin \omega t$ – просто $\sin \omega t$ и т.д.

Если функция-оригинал $f(t)$ удовлетворяет условию (11.1) при некоторых $M > 0$ и σ_1, то она удовлетворяет этому условию с тем же самым M и при всех $\sigma > \sigma_1$. С другой стороны, если при некотором значении σ_2 условие (11.1) не выполнено ни при каком $M > 0$, то это условие тем более не будет выполняться ни при каком $M > 0$ и $\sigma < \sigma_2$. Таким образом, все точки σ на числовой прямой разбиваются на две группы, образующие два луча $(-\infty; \sigma_0)$ и $(\sigma_0; +\infty)$: для любого $\sigma > \sigma_0$ условие (11.1) выполнено с некоторым $M > 0$ (зависящим, вообще

говоря, от σ) и для любого $\sigma < \sigma_0$ условие (11.1) не выполняется ни при каком $M > 0$. Число σ_0, разделяющее эти два множества, называется **индексом**, или **показателем роста функции** $f(t)$. При $\sigma = \sigma_0$ условие (11.1) для одних функций $f(t)$ выполняется, для других – нет. Например, для функций 1, $\sin \omega t$, $\cos \omega t$ показатель роста $\sigma_0 = 0$, и при $\sigma = \sigma_0 = 0$ условие (11.1) выполнено с $M = 1$. Для степенной функции t^n, $n > 0$, также $\sigma_0 = 0$. Действительно, при любом $\sigma > 0$ имеем $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^n}{e^{\sigma t}} = 0$ (этот результат можно получить, например, пользуясь правилом Лопиталя), и, следовательно, (11.1) выполнено с некоторым $M > 0$, зависящим от σ и n. Но при $\sigma = 0$ условие $|f(t)| \le Me^0 = M$ не выполнено ни при каком M, поскольку функция $|f(t)| = t^n, n > 0$, не является ограниченной при $t > 0$.

Для определения преобразования над функциями-оригиналами, о котором говорилось во введении, нам понадобятся еще некоторые понятия. Функция $\varphi(t)$, определенная при $t \ge 0$, называется *интегрируемой* на интервале $[0;+\infty)$, если существует предел

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^R \varphi(t)dt = \int_0^\infty \varphi(t)dt \qquad (11.3)$$

(т.е. если несобственный интеграл в (11.3) сходится). Функция $\varphi(t)$ называется *абсолютно интегрируемой* на множестве $[0;+\infty)$, если существует предел

$$\lim_{R \to \infty} \int_0^R |\varphi(t)|dt = \int_0^\infty |\varphi(t)|dt, \qquad (11.4)$$

т.е. сходится несобственный интеграл от $|\varphi(t)|$. Справедливо следующее утверждение, аналогичное теореме 1.2 об абсолютной сходимости рядов:

если функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема на множестве $[0;+\infty)$, то она интегрируема на этом множестве (другими словами, из сходимости интеграла $\int_0^\infty |\varphi(t)|dt$ следует сходимость интеграла $\int_0^\infty \varphi(t)dt$).

Мы не приводим доказательство этого утверждения, так как не будем использовать его непосредственно; читатель может вывести его из теоремы 1.2. Отметим, что обратное утверждение неверно: не всякая интегрируемая функция является также абсолютно интегрируемой.

Пусть теперь функция φ зависит от действительного переменного t и комплексного параметра p: $\varphi = \varphi(t, p)$. Если при некотором p интеграл $\int_0^\infty \varphi(t, p)dt$ сходится, то значение этого интеграла обозначим через $F(p)$. Таким образом, $F(p)$ оказывается функцией, определенной на множестве тех значений p, для которых интеграл $\int_0^\infty \varphi(t, p)dt$ сходится.

Определение. Интеграл $\int_0^\infty \varphi(t, p)dt$ называется равномерно сходящимся в области D к функции $F(p)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число R_0, зависящее только от ε, что для всех $R > R_0$ и всех точек $p \in D$ выполнено неравенство $\left|\int_0^R \varphi(t, p)dt - F(p)\right| < \varepsilon$.

Очевидно, что из равномерной сходимости интеграла $\int_0^\infty \varphi(t, p)dt$ в области D следует его сходимость в каждой точке $p \in D$. Но обратное неверно: интеграл, сходящийся в каждой точке области D, не обязательно сходится в этой области равномерно. Существенным

дополнительным условием, отличающим поточечную сходимость от равномерной, является то, что число R_0 в определении равномерной сходимости не зависит от p; это число одно и то же для всех точек $p \in D$. (Читатель, возможно, уже провел аналогию между равномерной сходимостью интегралов и равномерной сходимостью рядов – см. §2.)

Теперь мы готовы ввести нужное нам преобразование функций-оригиналов $f(t)$.

Преобразованием (оператором) Лапласа функции $f(t)$ называется правило, определяемое формулой

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \qquad (11.5)$$

по которому заданной функции $f(t)$ действительного переменного t ставится в соответствие функция $F(p)$ комплексного переменного p. Функция $F(p)$ определена на множестве тех значений p, для которых интеграл в (11.5) сходится. Эта функция называется *изображением* функции $f(t)$. Тот факт, что функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, записывается следующим образом: $f(t) \doteqdot F(p)$ или $F(p) \doteqdot f(t)$.

Отметим, что для построения операционного исчисления можно рассматривать и другие преобразования, отличные от преобразования Лапласа (11.5). Так, Хевисайд рассматривал преобразования $\widetilde{F}(p) = pF(p)$; изучаются и другие преобразования – Меллина, Фурье и т.д. – удобные в некоторых вопросах (подробнее см. [7]). Наиболее употребительным является преобразование Лапласа, которое мы и рассмотрим.

Теорема 11.1 **(теорема о существовании и аналитичности изображения).** Если $f(t)$ – функция-оригинал с индексом роста σ_0, то интеграл в (11.5) сходится абсолютно для всех p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$; при этом в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_1$ с $\sigma_1 > \sigma_0$ сходимость будет равномерной. Функция-изображение $F(p)$, определяемая формулой (11.5) в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, является

аналитической функцией в этой полуплоскости.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\sigma_1 > \sigma_0$. Положим

$$F_n(p) = \int_{n-1}^{n} f(t)e^{-pt}dt\,,\ n = 1,2,\ldots\,.$$

Докажем, что для любого n функции $F_n(p)$ являются аналитическими во всей комплексной плоскости C переменного p. Возьмем произвольный замкнутый контур Γ, лежащий в C. Тогда

$$\int_{\Gamma} F_n(p)dp = \int_{\Gamma}\left(\int_{n-1}^{n} f(t)e^{-pt}dt\right)dp = \int_{n-1}^{n}\left(\int_{\Gamma} f(t)e^{-pt}dp\right)dt\,. \qquad (11.6)$$

Поясним законность перемены порядка интегрирования в последнем равенстве. Зададим контур Γ параметрическими уравнениями $p(\tau) = x(\tau) + iy(\tau)$, $\alpha \le \tau \le \beta$. Тогда интегрирование по переменной p сведется к интегрированию по действительной переменной τ (подробнее см. §14 юниты 1) и двойные интегралы в (11.6) сведутся к интегрированию по прямоугольнику $\alpha \le \tau \le \beta$, $n-1 \le t \le n$. Из курса анализа известно, что расставлять пределы интегрирования в двойном интеграле по прямоугольнику можно в любом порядке, чем и обосновывается (11.6). Далее,

$$\int_{\Gamma} f(t)e^{-pt}dp = f(t)\int_{\Gamma} e^{-pt}dp = 0$$

(мы вынесли $f(t)$ за знак интеграла как постоянный множитель, не зависящий от переменной интегрирования p, и воспользовались тем, что интеграл по замкнутому контуру Γ от аналитической в C функции e^{-pt} равен нулю). Из (11.6) получаем

$$\int_{\Gamma} F_n(p)dp = 0\,,\ n = 1,2,\ldots\,.$$

Из кусочной непрерывности функции $f(t)$ и непрерывности функции e^{-pt} легко вывести, что все функции $F_n(p)$ будут непрерывны

в C. Таким образом, функции $F_n(p)$ удовлетворяют условиям теоремы Морера (см. теорему 17.6 юниты 1) и, следовательно, являются аналитическими в C. Так как $\sigma_1 > \sigma_0$, то в силу (11.1) $|f(t)| \le Me^{\sigma_1 t}$.

Пусть $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_1$. Тогда

$$|F_n(p)| = \left| \int_{n-1}^{n} f(t)e^{-pt}dt \right| \le \int_{n-1}^{n} |f(t)||e^{-pt}|dt \le M \int_{n-1}^{n} e^{\sigma_1 t} \cdot e^{-\sigma t}dt =$$

$$= M \int_{n-1}^{n} e^{-(\sigma-\sigma_1)t}dt = -\frac{M}{\sigma-\sigma_1} e^{-(\sigma-\sigma_1)t}\Big|_{n-1}^{n} < \frac{M}{\sigma-\sigma_1} e^{-(\sigma-\sigma_1)(n-1)} = a_n.$$

Числа a_n образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q < 1$ (действительно, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{-(\sigma-\sigma_1)} < 1$). Поэтому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Так как $|F_n(p)| < a_n$ во всех точках p из полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_1$, то по признаку равномерной сходимости Вейерштрасса (теорема 2.2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(p)$ сходится в этой полуплоскости абсолютно и равномерно.

Обозначим сумму этого ряда через $S(p)$. Так как все функции $F_n(p)$ являются аналитическими, то в силу теоремы 2.6 Вейерштрасса сумма $S(p)$ также аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_1$. Покажем, что $S(p) = F(p)$, где $F(p)$ определено равенством (11.5). Действительно, сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(p)$ означает, что существует предел $\lim_{n\to\infty} S_n(p)$ его частичных сумм $S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} F_n(p)$. Но

$$S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)e^{-pt}dt = \int_{0}^{n} f(t)e^{-pt}dt.$$

Поэтому равенство $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(p) = S(p)$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^n f(t)e^{-pt}dt = S(p)$. Покажем, что и $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_0^R f(t)e^{-pt}dt = S(p)$, причем сходимость равномерная. Возьмем $R > 1$ и подберем целое число n такое, что $n \le R < n+1$. Тогда

$$\left|\int_0^R f(t)e^{-pt}dt - S(p)\right| = \left|\int_0^n f(t)e^{-pt}dt + \int_n^R f(t)e^{-pt}dt - S(p)\right| \le$$

$$\le \left|\int_0^n f(t)e^{-pt}dt - S(p)\right| + \left|\int_n^R f(t)e^{-pt}dt\right| \le |S_n(p) - S(p)| + \int_n^R \left|f(t)e^{-pt}\right|dt \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k + a_n = \varepsilon_n.$$

Числа ε_n не зависят от p и стремятся к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, интеграл $\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ сходится к $S(p)$ равномерно в области $\operatorname{Re} p > \sigma_1$. Поскольку значение этого интеграла ранее обозначалось через $F(p)$ (см. (11.5)), то $S(p) = F(p)$. Тем самым аналитичность функции $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_1$ доказана. Отсюда легко вытекает выполнимость этого свойства и при $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. Действительно, пусть p' – любое число, для которого $\operatorname{Re} p' > \sigma_0$. Можно подобрать число σ_1 такое, что $\sigma_0 < \sigma_1 < \operatorname{Re} p'$. Согласно доказанному выше, интеграл в (11.5) сходится к аналитической функции $F(p)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_1$. В частности, это свойство имеет место и в точке p'. Теорема доказана.

Найдем изображения некоторых часто встречающихся функций-

оригиналов. Напомним, что все эти функции предполагаются равными нулю при $t<0$, т.е. умноженными на $h(t)$ (см. (11.2)).

Пример 11.2. Найти изображение единичной функции $h(t)$, определенной в (11.2).

Решение. Из определения (11.5) преобразования Лапласа получаем

$$F(p)=\int_0^{\infty} h(t)e^{-pt}dt=\int_0^{\infty} e^{-pt}dt=-\frac{e^{-pt}}{p}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{p},$$

так как $\lim\limits_{R\to+\infty} e^{-pR}=0$. Таким образом,

$$h(t)\doteqdot\frac{1}{p}, \text{ или } 1\doteqdot\frac{1}{p}. \qquad (11.7)$$

Пример 11.3. Найти изображение функции e^{at} (т.е. функции $h(t)e^{at}$).

Решение. Обозначим $\operatorname{Re} a=\sigma_0$ и возьмем такое p, что $\operatorname{Re} p>\sigma_0$. Тогда

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{at}e^{-pt}dt=\int_0^{\infty} e^{-(p-a)t}dt=-\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{p-a},$$

поскольку $\lim\limits_{R\to+\infty}\left|e^{-(p-a)R}\right|=\lim\limits_{R\to+\infty} e^{-(\operatorname{Re} p-\sigma_0)R}=0$. Следовательно,

$$e^{at}\doteqdot\frac{1}{p-a}. \qquad (11.8)$$

Заметим, что функция-изображение $F(p)=\dfrac{1}{p-a}$ оказывается определенной и аналитической во всей комплексной плоскости, за исключением особой точки $p=a$, хотя задающий это изображение интеграл Лапласа сходится лишь при $\operatorname{Re} p>\sigma_0$. Как мы увидим в дальнейшем, такая ситуация является типичной: как правило, функция $F(p)$ оказывается определенной и аналитической в значительно

большей части комплексной плоскости, чем полуплоскость $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. Согласно теореме 11.1, функция $F(p)$ не имеет особых точек в этой полуплоскости; все они лежат левее прямой $\operatorname{Re} p = \sigma_0$ или на самой этой прямой.

Преобразование Лапласа (11.5) каждой функции-оригиналу $f(t)$ ставит в соответствие функцию-изображение $F(p)$. Оказывается, у разных функций-оригиналов изображения также должны быть разными. Более того, существует формула, называемая **формулой обращения**, которая позволяет по известному изображению $F(p)$ восстановить оригинал $f(t)$.

Теорема 11.3 **(теорема обращения).** Если $f(t)$ – функция-оригинал с индексом роста σ_0 и $F(p)$ – ее изображение, то во всякой точке непрерывности функция $f(t)$ выражается через $F(p)$ по следующей формуле обращения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p)dp, \qquad (11.9)$$

где интеграл берется по любой прямой $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ и понимается в смысле главного значения, т.е.

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} F(p)dp = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} e^{pt} F(p)dp.$$

Мы не приводим доказательство этой теоремы, рекомендуя читателю учебники [2], [7], [11] (в [7] имеется и нестрогое рассуждение, объясняющее происхождение формулы (11.9), и аккуратное доказательство). В некоторых книгах (например, [1], [5]) формула (11.9) выводится из аналогичной формулы для преобразования Фурье, которое мы не рассматриваем.

В примерах 11.2, 11.3 мы находили изображение непосредственно по определению (11.5) преобразования Лапласа. Во многих случаях для отыскания изображения заданной функции значительно удобнее пользоваться общими свойствами преобразования Лапласа. К изучению некоторых из них мы и переходим.

§12. Основные свойства преобразования Лапласа

В дальнейшем через $f(t), g(t), \ldots$ мы обозначаем функции-оригиналы, а через $F(p), G(p), \ldots$ – их изображения.

1°. Свойство линейности. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, $g(t) \doteqdot G(p)$, то для любых комплексных постоянных α и β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteqdot \alpha F(p) + \beta G(p). \qquad (12.1)$$

Доказательство немедленно следует из определения (11.5) преобразования Лапласа и свойства линейности интеграла. Действительно, изображение функции $\alpha f(t) + \beta g(t)$ равно

$$\int_0^\infty \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big) e^{-pt} dt = \alpha \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^\infty g(t) e^{-pt} dt = \alpha F(p) + \beta G(p).$$

Отметим, что интегралы $\int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ и $\int_0^\infty g(t) e^{-pt} dt$ сходятся, вообще говоря, в разных полуплоскостях $\operatorname{Re} p > \sigma_1$ и $\operatorname{Re} p > \sigma_2$. Тогда интеграл $\int_0^\infty \big(\alpha f(t) + \beta g(t)\big) e^{-pt} dt$ будет сходиться в пересечении этих полуплоскостей, т.е. в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$, где $\sigma_0 = \max(\sigma_1, \sigma_2)$.

Пример 12.1. Найти изображения функций $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $\operatorname{sh} \omega t$, $\operatorname{ch} \omega t$.

Решение. Заданные функции выражаются через показательные функции по формулам (см. формулы (12.2), (12.5) юниты 1):

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}, \quad \cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2},$$

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}, \quad \operatorname{ch} \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}.$$

В силу (11.8) $e^{i\omega t} \doteqdot \frac{1}{p - i\omega}$, $e^{-i\omega t} \doteqdot \frac{1}{p + i\omega}$. Пользуясь свойством (12.1), получаем

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} e^{i\omega t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega t} \doteq \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{p + i\omega} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \quad (12.2)$$

Аналогично выводятся соотношения:

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \ \operatorname{sh} \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 - \omega^2}, \ \operatorname{ch} \omega t \doteq \frac{p}{p^2 - \omega^2}. \quad (12.3)$$

Читателю рекомендуется получить их самостоятельно.

2°. Поведение изображения при $p \to \infty$. Изображение $F(p)$ любой функции-оригинала $f(t)$ стремится к нулю, если $p \to \infty$ так, что $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

Доказательство. Пусть σ_0 – индекс роста функции-оригинала $f(t)$. Возьмем некоторое число $\sigma_1 > \sigma_0$ и обозначим $\operatorname{Re} p = \sigma$. В силу (11.5) и (11.1) имеем $|f(t)| \le Me^{\sigma_1 t}$, и при $\sigma > \sigma_1$

$$|F(p)| = \left| \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt \right| \le \int_0^\infty |f(t)| \cdot |e^{-pt}| dt \le M \int_0^\infty e^{\sigma_1 t} \cdot e^{-\sigma t} dt =$$

$$= M \int_0^\infty e^{-(\sigma - \sigma_1)t} dt = -\frac{M}{\sigma - \sigma_1} e^{-(\sigma - \sigma_1)t} \Big|_0^\infty = \frac{M}{\sigma - \sigma_1}.$$

Отсюда следует, что $F(p) \to 0$ при $\sigma \to \infty$, что и требовалось доказать.

3°. Теорема подобия. Если $f(t) \doteq F(p)$, то для любого числа $\lambda > 0$

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (12.4)$$

Доказательство. Введем новое переменное $\tau = \lambda t$. Тогда $t = \frac{\tau}{\lambda}$, $dt = \frac{1}{\lambda} d\tau$. Подставляя эти равенства в интеграл, получаем

$$\int_0^\infty f(\lambda t) e^{-pt} = \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{p}{\lambda}\tau} \cdot \frac{1}{\lambda} d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$$

(последнее равенство получается из определения (11.5), в котором неважно, какой буквой обозначена переменная интегрирования: t или τ).

4°. Теорема запаздывания. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого $\tau > 0$

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-p\tau} F(p). \qquad (12.5)$$

Название теоремы объясняется тем, что в приложениях τ является временем запаздывания сигнала.

Доказательство. Введем новое переменное $\xi = t - \tau$. Тогда $t = \xi + \tau$, $dt = d\xi$. При изменении t от 0 до ∞ переменная ξ изменяется от $-\tau$ до ∞. Переходя в интеграле к переменной ξ, получаем

$$\int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_{-\tau}^\infty f(\xi)e^{-p(\xi+\tau)}d\xi = e^{-p\tau}\int_{-\tau}^\infty f(\xi)e^{-p\xi}d\xi.$$

Но функция-оригинал $f(\xi)$ равна нулю на интервале $(-\tau;0)$, т.к. $f(\xi) = 0$ при $\tau < 0$. Поэтому правая часть последнего равенства равна

$$e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\xi)e^{-p\xi}d\xi = e^{-p\tau}F(p).$$

Двойственной к теореме запаздывания является следующая теорема.

5°. Теорема смещения. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то для любого числа λ

$$e^{-\lambda t} f(t) \doteqdot F(p+\lambda). \qquad (12.6)$$

Доказательство. Непосредственно из определения (11.5) получаем

$$e^{-\lambda t} f(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(\lambda+p)t} dt = F(p+\lambda).$$

Пример 12.2. Найти изображения функций $e^{at}\sin\omega t$, $e^{at}\cos\omega t$.

Решение. Возьмем $f(t) = \sin\omega t$. Согласно (12.2)

$F(p)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$. По теореме смещения для отыскания изображения функции $e^{-\lambda t}f(t)$ следует в выражение для $F(p)$ подставить $p+\lambda$ вместо p. В нашем случае $\lambda=-a$. Подставляя $p-a$ вместо p, получаем

$e^{at}\sin\omega t \doteqdot \dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$. Аналогично $e^{at}\cos\omega t \doteqdot \dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$. (12.7)

6°. Теорема о дифференцировании оригинала. Пусть $f(t)$ непрерывна при $t\geq 0$, $f(t)$ и $f'(t)$ являются функциями-оригиналами и $f(t)\doteqdot F(p)$. Тогда

$$f'(t)\doteqdot pF(p)-f(0). \qquad (12.8)$$

Если, кроме того, производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(t)$ непрерывна при $t\geq 0$ и $f^{(n)}(t)$ – тоже функция-оригинал, то

$$f^{(n)}(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0), \qquad (12.9)$$

где под значениями $f^{(k)}(0)$ понимается правый предел $\lim\limits_{t\to 0+0} f^{(k)}(t)$.

Доказательство. Пусть σ_0 – индекс роста функции $f(t)$ и $\operatorname{Re} p=\sigma>\sigma_1>\sigma_0$. Записывая преобразование Лапласа для производной $f'(t)$ и интегрируя по частям, получаем

$$f'(t)\doteqdot\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt \qquad (12.10)$$

(мы воспользовались равенством $de^{-pt}=-pe^{-pt}dt$). Согласно (11.1)

$$\left|f(t)e^{-pt}\right|\leq Me^{\sigma_1 t}\cdot\left|e^{-pt}\right|=Me^{-(\sigma-\sigma_1)t}\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

Поэтому $f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty=0-f(0)$. Учитывая, что интеграл в правой части (12.10) равен $F(p)$, приходим к (12.8).

Для получения изображения второй производной $f''(t)$ применим формулу (12.8) дважды. Пусть $F_1(p)$ – изображение функции $f'(t)$. Согласно (12.8) $F_1(p) = pF(p) - f(0)$ и

$$f''(t) = \left(f'(t)\right)' \doteq pF_1(p) - f'(0) = p(pF(p) - f(0)) - f'(0) =$$

$$= p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Аналогично

$$f'''(t) = \left(f''(t)\right)' \doteq p\left(p^2F(p) - pf(0) - f'(0)\right) - f''(0) =$$

$$= p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0),$$

и так далее. Тем самым справедливость соотношения (12.9) установлена.

В частности, если $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteq p^nF(p)$, т.е. *при нулевых начальных условиях n-кратное дифференцирование оригинала сводится к умножению на p^n его изображения.*

7°. Теорема об интегрировании оригинала. Если $f(t)$ является функцией-оригиналом и $f(t) \doteq F(p)$, то интеграл $\int_0^t f(\tau)d\tau$ также является оригиналом и

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}. \qquad (12.11)$$

Доказательство. Положим $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ и покажем, что $\varphi(t)$ – функция-оригинал, т.е. удовлетворяет условиям 1-3, данным в начале §11. Так как $f(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, то $\varphi(t) = 0$ при $t \leq 0$ (подчеркнем, что $\varphi(0) = 0$, даже если $f(0) \neq 0$). Функция $\varphi(t)$ непрерывна и кусочно-дифференцируема при $t \in (-\infty; +\infty)$. Поскольку

$f(t)$ – функция-оригинал, то существуют постоянные $M > 0$ и σ такие, что $|f(t)| \le Me^{\sigma t}$. Тогда

$$|\varphi(t)| \le \int_0^t |f(\tau)|d\tau = M\int_0^t e^{\sigma\tau}d\tau = \frac{M}{\sigma}(e^{\sigma t} - 1) < M_1 e^{\sigma t}, \quad M_1 = \frac{M}{\sigma}.$$

Таким образом, $\varphi(t)$ является функцией-оригиналом. Пусть $\Phi(t)$ – изображение функции $\varphi(t)$. Используя равенства $\varphi'(t) = f(t)$ (это следует из теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом) и $\varphi(0) = 0$, из (12.8) получаем

$$f(t) = \varphi'(t) \doteqdot p\Phi(p) - \varphi(0) = p\Phi(p).$$

Итак, $p\Phi(p)$ является изображением функции $f(t)$. Но $F(p)$ – также изображение этой функции. Поэтому $p\Phi(p) = F(p)$, т.е. $\Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$. Следовательно, изображением функции $\varphi(t)$ будет $\dfrac{F(p)}{p}$, что и требовалось доказать.

8°. Теорема о дифференцировании изображения. Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то

$$-tf(t) \doteqdot F'(p). \qquad (12.12)$$

Доказательство основано на следующем свойстве, обоснование которого мы не приводим: чтобы найти производную $F'(p)$, т.е. производную по переменной p интеграла $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$, нужно вычислить интеграл от производной по p подынтегральной функции; другими словами, продифференцировать по p под знаком интеграла:

$$F'(p) = \int_0^\infty \left(f(t)e^{-pt}\right)'_p dt = \int_0^\infty -tf(t)e^{-pt}dt.$$

Последний интеграл является преобразованием Лапласа функции $-tf(t)$, что и доказывает соотношение (12.12).

Применяя (12.12) n раз, получим

$$(-1)^n t^n f(t) \doteqdot F^{(n)}(p). \qquad (12.13)$$

Пример 12.3. Найти изображение функций t^n, $t^n e^{at}$, $t\sin\omega t$, $t\cos\omega t$.

Решение. Так как $1 \doteqdot \frac{1}{p}$ (см. (11.7)), то в силу (12.12) $-t\left(\frac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2}$, т.е. $t \doteqdot \frac{1}{p^2}$. Последовательно применяя формулу (12.12), получим:

$-t^2 \doteqdot -\frac{2}{p^3}$, т.е. $t^2 \doteqdot \frac{2}{p^3}$; $-t^3 \doteqdot -\frac{2\cdot 3}{p^4}$, т.е. $t^3 \doteqdot \frac{2\cdot 3}{p^4}$, и вообще

$$t^n \doteqdot \frac{n!}{p^{n+1}},\ n = 1,2,\ldots. \qquad (12.14)$$

Для отыскания изображения функции $t^n e^{at}$ воспользуемся теоремой смещения, как и в примере 12.2. Подставляя в правую часть соотношения (12.14) $p+\lambda = p-a$ вместо p, получаем

$$e^{at}t^n \doteqdot \frac{n!}{(p-a)^{n+1}},\ n = 1,2,\ldots. \qquad (12.15)$$

Изображения функций $t\sin\omega t$ и $t\cos\omega t$ также легко находятся по формуле (12.12), если применить уже известные выражения для изображений функций $\sin\omega t$ и $\cos\omega t$. Так, из (12.12) и (12.2) следует

$$-t\sin\omega t \doteqdot \left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)' = -\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2},\ \text{т.е. } t\sin\omega t \doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Аналогично из (12.12) и (12.3) находится изображение функции $t\cos\omega t$. Итак,

$$t\sin\omega t \doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2},\ t\cos\omega t \doteqdot \frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}. \qquad (12.16)$$

9°. Теорема об интегрировании изображения. Если $f(t)$ и $\frac{f(t)}{t}$ являются функциями-оригиналами и $f(t)\doteqdot F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int_p^\infty F(s)ds. \qquad (12.17)$$

Доказательство. Обозначим через $\Phi(p)$ изображение функции $\frac{f(t)}{t}$, т.е. $\Phi(p)=\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt$. Найдем производную $\Phi'(p)$. Для этого (как и при доказательстве предыдущей теоремы) продифференцируем по p выражение, стоящее под знаком интеграла:

$$\Phi'(p)=\int_0^\infty\left(\frac{f(t)}{t}e^{-pt}\right)'_p dt=\int_0^\infty -t\cdot\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt=-\int_0^\infty f(t)e^{pt}dt=-F(p),$$

т.е. $\Phi'(p)=-F(p)$. По формуле Ньютона-Лейбница

$$\Phi(p)-\Phi(R)=-(\Phi(R)-\Phi(p))=-\int_p^R \Phi'(s)ds=\int_p^R F(s)ds.$$

Так как $\Phi(p)$ – функция-изображение, то по свойству 2° $\lim\limits_{R\to+\infty}\Phi(R)=0$. Переходя к пределу при $R\to+\infty$, получаем

$$\Phi(p)-\lim_{R\to+\infty}\Phi(R)=\lim_{R\to+\infty}\int_p^R F(s)ds=\int_p^\infty F(s)ds,\ \text{т.е. } \Phi(p)=\int_p^\infty F(s)ds,$$

что равносильно соотношению (12.7).

Пример 12.4. Найти изображение функции $\frac{\sin\omega t}{t}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{t\to 0+0}\dfrac{\sin\omega t}{t}=\omega$ – конечное число, то $\dfrac{\sin\omega t}{t}$ является функцией-оригиналом. Используя соотношение $\sin\omega t \doteqdot \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ и (12.17), получаем

$$\frac{\sin\omega t}{t}\doteqdot\int_p^\infty\frac{\omega}{s^2+\omega^2}ds=\omega\frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{s}{\omega}\Big|_p^\infty=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{\omega}. \quad (12.18)$$

Полученные формулы позволяют вычислять некоторые интегралы. Например, (12.18) означает, что

$$\int_0^\infty\frac{\sin\omega t}{t}e^{-pt}dt=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{p}{\omega}.$$

Полагая $p=0$, получаем $\int\limits_0^\infty\dfrac{\sin\omega t}{t}dt=\dfrac{\pi}{2}$. (Необходимо заметить, что прежде нам следовало бы убедиться в сходимости соответствующего интеграла. Мы не останавливаемся здесь на доказательстве этого факта.)

Изложенные выше свойства преобразования Лапласа позволяют находить изображения и ряда других функций.

Пример 12.5. Найти изображение прямоугольного импульса $f(t)$ высотой 1 и шириной l, изображенного на рис.13.

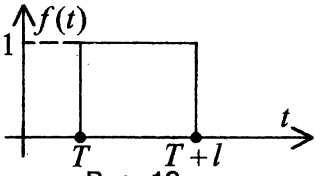


Рис. 13

Решение. Искомое изображение нетрудно найти, непосредственно вычисляя интеграл в (11.5):

$$F(p)=\int_T^{T+l}1\cdot e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_T^{T+l}=\frac{1}{p}(e^{-pT}-e^{-p(T+l)})=\frac{e^{-pT}}{p}(1-e^{-pl}).$$

Но можно поступить и по-другому. Пусть $h(t)$ – единичная функция, определенная в (11.2). Функции $h(t-T)$ и $h(t-T-l)$ получаются из

нее смещением вправо на T и $T+l$ единиц соответственно. Поэтому заданный импульс $f(t)$ можно представить в виде разности $f(t)=h(t-T)-h(t-T-l)$. Используя линейность преобразования Лапласа, формулу $h(t)\doteqdot\frac{1}{p}$ и теорему запаздывания (12.5), получаем

$$f(t)\doteqdot e^{-pT}\frac{1}{p}-e^{-p(T+l)}\frac{1}{p}=\frac{e^{-pT}}{p}(1-e^{-pl}). \qquad (12.19)$$

Следующий пример показывает, как можно получить изображение периодического сигнала, зная изображение отдельного импульса.

Пример 12.6. Найти изображение бесконечной серии прямоугольных импульсов высотой 1 и шириной l, имеющих период T (рис.14).

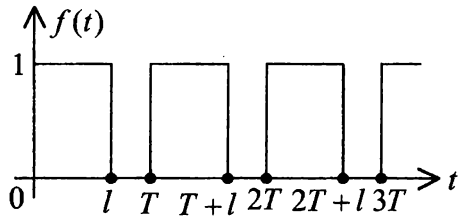


Рис. 14

Решение. Обозначим через $f_n(t)$ n-й импульс, который начинается в момент времени nT и длится время l. Из предыдущего примера следует, что

$$f_n(t)\doteqdot\frac{e^{-pnT}}{p}(1-e^{-pl})$$

(мы подставили в (12.19) nT вместо T). Очевидно, данный периодический сигнал $f(t)$ можно рассматривать как сумму отдельных импульсов $f_n(t)$: $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(t)$. В силу линейности преобразования Лапласа

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-pnT}}{p}(1-e^{-pl})=\frac{1}{p}(1-e^{-pl})\sum_{n=0}^{\infty}e^{-pTn}=\frac{1-e^{-pl}}{p(1-e^{-pT})}$$

(в последнем равенстве мы воспользовались формулой (4.6) для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q=e^{-pT}<1$). Заметим, что можно было получить изображение $F_0(t)$

лишь первого импульса $f_0(t)$; изображения остальных импульсов сразу следуют из формулы (12.5):

$$f_n(t) = f_0(t-nT) \doteq e^{-pnT} F_0(t).$$

Для изложения следующего свойства преобразования Лапласа нам понадобится понятие свертки двух функций. Пусть функции $f(t)$ и $g(t)$ определены и кусочно-непрерывны при $t \in (-\infty;+\infty)$. Тогда для каждого значения t существует интеграл $\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$. Этот интеграл, очевидно, является функцией переменной t. **Сверткой функций $f(t)$ и $g(t)$** называется новая функция переменной t, обозначаемая $f*g(t)$ и определяемая равенством

$$f*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \qquad (12.20)$$

Установим два свойства свертки.

Свойство 1. Справедливо равенство

$$f*g(t) = g*f(t). \qquad (12.21)$$

Доказательство. Введем новую переменную $\xi = t-\tau$, откуда $\tau = t-\xi$, $d\tau = -d\xi$. При изменении τ от 0 до t переменная ξ изменяется от t до 0. Отсюда

$$f*g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = -\int_t^0 f(t-\xi)g(\xi)d\xi = \int_0^t g(\xi)f(t-\xi)d\xi =$$

$$= g*f(t).$$

Свойство 2. Если $f(t)$ и $g(t)$ – функции-оригиналы с индексами роста σ_0 и s_0 соответственно, то свертка $f*g(t)$ – тоже функция-оригинал, индекс роста которой не превосходит $\max(\sigma_0, s_0)$.

Доказательство. Так как $f(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, то и $f*g(t) = 0$

при $t<0$. Из кусочной дифференцируемости функций $f(t)$ и $g(t)$ следует, что аналогичным свойством обладает и свертка $f*g(t)$. Осталось проверить условие роста (11.1). Возьмем любое σ такое, что $\sigma>\sigma_0$ и $\sigma>s_0$. Тогда найдется σ_1, для которого $\sigma>\sigma_1>s_0$. Так как $f(t)$ и $g(t)$ – функции-оригиналы, то существуют такие числа $M_1>0$ и $M_2>0$, что $|f(t)|<M_1e^{\sigma t}$, $|g(t)|<M_2e^{\sigma_1 t}$. Из (12.20) следует

$$|f*g(t)|=\left|\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right|\le\int_0^t|f(\tau)||g(t-\tau)|d\tau\le$$

$$\le M_1M_2\int_0^t e^{\sigma\tau}\cdot e^{\sigma_1(t-\tau)}d\tau=M_1M_2e^{\sigma_1 t}\int_0^t e^{(\sigma-\sigma_1)\tau}d\tau=$$

$$=M_1M_2e^{\sigma_1 t}\frac{1}{\sigma-\sigma_1}e^{(\sigma-\sigma_1)\tau}\Big|_0^t=\frac{M_1M_2}{\sigma-\sigma_1}e^{\sigma_1 t}\left(e^{(\sigma-\sigma_1)t}-1\right)<$$

$$<\frac{M_1M_2}{\sigma-\sigma_1}e^{\sigma_1 t}\cdot e^{(\sigma-\sigma_1)t}=Me^{\sigma t},\quad M=\frac{M_1M_2}{\sigma-\sigma_1}.$$

Итак, свертка $f*g(t)$ удовлетворяет условию (11.1) для любого $\sigma>\max(\sigma_0,s_0)$. Отсюда и следует, что $f*g(t)$ – функция-оригинал с индексом роста, не превосходящем $\max(\sigma_0,s_0)$.

Теперь мы готовы доказать следующее свойство преобразования Лапласа.

10°. Теорема умножения изображений. Если $f(t)\doteq F(p)$, $g(t)\doteq G(p)$, то

$$f*g(t)\doteq F(p)G(p), \qquad (12.22)$$

т.е. изображением свертки функций $f(t)$ и $g(t)$ является произведение изображений этих функций.

Доказательство. Запишем преобразование Лапласа для свертки:

$$f(t)*g(t)\doteq\int_0^{\infty}e^{-pt}dt\int_0^{t}f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

Мы получили двойной интеграл по неограниченной области D, изображенной на рис. 15. Изменим порядок интегрирования, вычисляя внешний интеграл по переменной τ, а внутренний по t. (Мы не останавливаемся подробно на обосновании законности этой операции, отметим лишь, что возможность изменить порядок интегрирования в несобственном двойном интеграле следует из абсолютной сходимости этого интеграла при $\operatorname{Re} p>\max(\sigma_0,s_0)$, которая имеет место в силу свойства 2 свертки.) При фиксированном значении τ переменная t изменяется от τ до . Поэтому

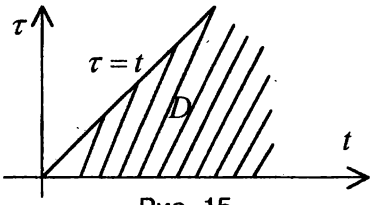


Рис. 15

$$\int_0^{\infty}e^{-pt}dt\int_0^{t}f(\tau)g(t-\tau)d\tau=\int_0^{\infty}d\tau\int_{\tau}^{\infty}e^{-pt}f(\tau)g(t-\tau)dt=$$

$$=\int_0^{\infty}f(\tau)d\tau\int_{\tau}^{\infty}e^{-pt}g(t-\tau)dt$$

(мы вынесли за знак внутреннего интеграла множитель $f(\tau)$, не зависящий от переменной интегрирования t). Во внутреннем интеграле перейдем к новой переменной $\xi=t-\tau$. Тогда $t=\xi+\tau$, $dt=d\xi$. При изменении t от τ до переменная ξ изменяется от 0 до . Поэтому

$$\int_{\tau}^{\infty}e^{-pt}g(t-\tau)dt=\int_0^{\infty}e^{-p(\xi+\tau)}g(\xi)d\xi=e^{-p\tau}\int_0^{\infty}e^{-p\xi}g(\xi)d\xi=e^{-p\tau}G(p).$$

Тем самым внутренний интеграл вычислен, и мы получаем

$$f*g(t)\doteq\int_0^{\infty}f(\tau)e^{-p\tau}G(p)d\tau=G(p)\int_0^{\infty}e^{-p\tau}f(\tau)d\tau=G(p)\cdot F(p),$$

что и требовалось доказать.

Формула (12.22) часто используется для определения оригинала

по заданному изображению, когда изображение раскладывается на множители, для которых оригиналы известны.

Пример 12.7. Найти оригинал функции $F(p)=\dfrac{\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$.

Решение. Функция $F(p)$ представляется в виде произведения $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$. Поскольку $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\doteqdot\sin\omega t$ (формула (12.2)), то в силу (12.22)

$$F(p)\doteqdot\int_0^t\sin\omega t\cdot\sin\omega(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t(\cos\omega(2\tau-t)-\cos\omega t)d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\omega}\sin\omega(2\tau-t)\Big|_0^{2t}-\frac{1}{2}t\cos\omega t=\frac{1}{2\omega}\sin\omega t-\frac{1}{2}t\cos\omega t.$$

Полученный результат легко проверить, пользуясь линейностью преобразования Лапласа и формулами (12.2) и (12.16). Действительно,

$$\frac{1}{2\omega}\sin\omega t-\frac{1}{2}t\cos\omega t\doteqdot\frac{1}{2\omega}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{1}{2}\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}=$$

$$=\frac{p^2+\omega^2-p^2+\omega^2}{2(p^2+\omega^2)^2}=\frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

Приведем следствие теоремы умножения изображений, полезное для применения операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений.

Теорема 12.8. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ – функции-оригиналы, причем производная $g'(t)$ – также функция-оригинал. Тогда имеет место соответствие:

$$pF(p)G(p)\doteqdot g(0)f(t)+\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \qquad (12.23)$$

Доказательство. Интеграл в правой части (12.23) является сверткой $f*g'(t)$. По свойству 2° (формула (12.8)) изображением функции $g'(t)$ является $pG(p)-g(0)$. Пользуясь линейностью

преобразования Лапласа и теоремой умножения изображений, получаем

$$g(0)f(t)+f*g'(t)\doteq g(0)F(p)+F(p)(pG(p)-g(0))=pF(p)G(p),$$

и соответствие (12.23) доказано.

Формула (12.23) называется *формулой* или *интегралом Дюамеля*. Ее можно записать в различных формах. Левая часть в (12.23) симметрична относительно $F(p)$ и $G(p)$, поэтому в правой части $f(t)$ и $g(t)$ можно поменять местами. Кроме того, в силу свойства $f*g'(t)=g'*f(t)$ под интегралом можно поменять местами f и g'. Мы не выписываем соответствующие формулы. Применение интеграла Дюамеля будет дано в следующем разделе.

Для удобства дальнейших применений сведем изображения элементарных функций и основные свойства преобразования Лапласа в единую таблицу.

№ п/п	Оригинал	Изображение
1	1	$\frac{1}{p}$
2	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
3	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
4	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
5	$\mathrm{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
6	$\mathrm{ch}\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
7	$e^{at}\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$

№ п/п	Оригинал	Изображение
8	$e^{at}\cos\omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
9	$t^n, \quad n=1;2,...$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
10	$t^n e^{at}, \quad n=1,2,...$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
11	$t\sin\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
12	$t\cos\omega$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
13	$t\mathrm{sh}\omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2-\omega^2)^2}$
14	$t\mathrm{ch}\omega t$	$\frac{p^2+\omega^2}{(p^2-\omega^2)^2}$
15	$\frac{\sin\omega t}{t}$	$\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\frac{p}{\omega}$
16	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha F(p)+\beta G(p)$
17	$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right)$
18	$f(t-\tau)$	$e^{-p\tau}F(p)$
19	$e^{-\lambda t}f(t)$	$F(p+\lambda)$
20	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
21	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-...$ $...-f^{(n-1)}(0)$

№ п/п	Оригинал	Изображение
22	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
23	$-tf(t)$	$F'(p)$
24	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(s)ds$
25	$f*g(t)$	$F(p)G(p)$
26	$g(0)f(t)+\int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau$	$pF(p)G(p)$

В приведенной таблице формулы 1 – 15 являются изображениями некоторых элементарных функций; соотношения 16–26 выражают основные свойства преобразования Лапласа. Укажем для каждой строки таблицы, где была выведена соответствующая формула: 1 – (11.7); 2 – (11.8); 3 – (12.2); 4-6 – (12.3); 7-8 – (12.7); 9 – (12.14); 10 – (12.15); 11-12 – (12.16); формулы 13-14 ранее не приводились, но выводятся так же, как и две предыдущие – см. пример 12.3; 15 – (12.18); 16 – (12.1) (свойство линейности); 17 – (12.4) (теорема подобия); 18 – (12.5) (теорема запаздывания); 19 – (12.6) (теорема смещения); 20 – (12.8), 21 – (12.9) (теорема о дифференцировании оригинала); 22 – (12.11) (теорема об интегрировании оригинала); 23 – (12.12) (теорема о дифференцировании изображения); 24 – (12.17) (теорема об интегрировании изображения); 25 – (12.22) (теорема умножения изображений); 26 – (12.23) (интеграл Дюамеля).

Более подробная таблица изображений имеется в [7], с.502-504.

§13. Применение операционного исчисления к решению обыкновенных дифференциальных уравнений

Одним из важнейших применений операционного исчисления является решение линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, т.е. уравнений вида:

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=f(t), \qquad (13.1)$$

где $a_0,...,a_n$ – заданные числа (коэффициенты уравнения), $f(t)$ – заданная и $y = y(t)$ – искомая (неизвестная) функция. Требуется решить задачу Коши, т.е. найти решение этого уравнения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0', \ ..., \ y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (13.2)$$

где $y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ – произвольно заданные числа.

Предположим, что правая часть $f(t)$ есть функция-оригинал. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что при этом условии решение $y(t)$ задачи Коши существует, единственно и также является функцией-оригиналом. Основные этапы решения задачи операционным методом изложены во введении к данной главе.

1. Перейдем от функций $y(t)$ и $f(t)$ к их изображениям $Y(p)$ и $F(p)$.

2. Используя свойство линейности преобразования Лапласа (формула 16 таблицы) и теорему о дифференцировании оригинала (формула 21), перейдем от уравнения (13.1) относительно оригинала $y(t)$ к уравнению относительно изображения $Y(p)$:

$$a_0(p^nY - p^{n-1}y_0 - p^{n-2}y_0' - ... - y_0^{(n-1)}) + a_1(p^{n-1}Y - p^{n-2}y_0 - p^{n-3}y_0' - ...$$

$$... - y_0^{(n-2)}) + ... + a_nY = F(p). \qquad (13.3)$$

Уравнение (13.3) называется **изображающим**, или **операторным** уравнением. Оно оказалось проще исходного уравнения (13.1), так как является линейным алгебраическим уравнением относительно Y.

3. Решим уравнение (13.3) относительно Y. С этой целью члены уравнения, содержащие Y, оставим слева, а остальные перенесем в правую часть:

$$Y(a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_n) = F(p) + a_0(p^{n-1}y_0 + p^{n-2}y_0' + ...$$

$$... + y_0^{(n-1)}) + a_1(p^{n-2}y_0 + p^{n-3}y_0') + ... \qquad (13.4)$$

Обозначим множитель при Y через $A(p)$:

$$A(p) = a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_n.$$

Это **характеристический многочлен** линейного дифференциального

уравнения. Правую часть уравнения (13.4), за исключением слагаемого $F(p)$, обозначим через $B(p)$. Очевидно, $B(p)$ является многочленом степени $n-1$. Теперь уравнение (13.4) примет вид

$$A(p)Y = F(p) + B(p),$$

откуда

$$Y = Y(p) = \frac{F(p)}{A(p)} + \frac{B(p)}{A(p)}. \qquad (13.5)$$

Заметим, что если начальные условия нулевые, т.е. $y_0 = y_0' = \ldots = y_0^{(n-1)} = 0$, то $B(p) = 0$.

4. Осталось выполнить последний этап – от найденного изображения $Y(p)$ перейти к оригиналу $y(t)$, который и является решением задачи Коши.

Пример 13.1. Найти решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = \sin 2t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Р е ш е н и е. Согласно формуле 3 таблицы, $\sin 2t \doteq \frac{2}{p^2+4}$.

Пользуясь соотношениями 21 и 20 таблицы, прейдем к операторному уравнению:

$$(p^2Y - p\cdot 0 - 1) - 3(pY - 0) + 2Y = \frac{2}{p^2+4}, \text{ откуда}$$

$$Y(p^2 - 3p + 2) = \frac{2}{p^2+4} + 1 = \frac{p^2+6}{p^2+4},\ Y = Y(p) = \frac{p^2+6}{(p^2+4)(p^2-3p+2)}.$$

Полученное изображение является дробно-рациональной функцией, у которой степень числителя строго меньше степени знаменателя. Остановимся подробнее на методах отыскания оригиналов таких функций (в частности, мы найдем оригинал и данного изображения $Y(p)$).

Нахождение оригиналов по известному изображению. Мы изложим два способа нахождения оригинала. Первый способ состоит в том, что дробь $Y(p)$ разлагается в сумму простейших дробей, используя метод неопределенных коэффициентов. После этого изображение

каждого слагаемого легко находится по таблице. Предполагая, что читатель знаком с методом неопределенных коэффициентов из курса интегрального исчисления, мы лишь кратко напомним его суть.

Вначале знаменатель дроби $Y(p)$ раскладывается на множители вида $(ap+b)^k$ и $(ap^2+bp+c)^l$. Каждому множителю $(ap+b)^k$ соответствует в разложении дроби $Y(p)$ сумма

$$\frac{A}{ap+b}+\frac{B}{(ap+b)^2}+\ldots+\frac{C}{(ap+b)^k};$$

каждому множителю $(ap^2+bp+c)^l$ соответствует сумма

$$\frac{M_1p+N_1}{ap^2+bp+c}+\frac{M_2p+N_2}{(ap^2+bp+c)^2}+\ldots+\frac{M_lp+N_l}{(ap^2+bp+c)^l}.$$

Коэффициенты A,B,C,M_k,N_k разложения определены однозначно; они находятся путем сравнения лёвой и правой частей разложения. Способы отыскания этих коэффициентов более подробно проиллюстрируем на примере.

Пример 13.2. Найти оригинал функции

$$Y(p)=\frac{p^2+6}{(p^2+4)(p^2-3p+2)}.$$

Решение. Разложим знаменатель на множители. Уравнение $p^2-3p+2=0$ имеет корни $p_1=1, p_2=2$; уравнение $p^2+4=0$ действительных корней не имеет. Таким образом,

$$\frac{p^2+6}{(p^2+4)(p^2-3p+2)}=\frac{p^2+6}{(p-1)(p-2)(p^2+4)}.$$

Множители $(p-1)$ и $(p-2)$ являются множителями первого типа с $k=1$; каждый из них дает слагаемое вида $\frac{A}{p-p_m}$; множитель p^2+4, являясь множителем второго типа с $l=1$, дает слагаемое вида $\frac{Mp+N}{p^2+4}$.

Таким образом, разложение данной дроби имеет вид

$$\frac{p^2+6}{(p^2-3p+2)(p^2+4)}=\frac{p^2+6}{(p-1)(p-2)(p^2+4)}=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p-2}+\frac{Mp+N}{p^2+4}.$$

Приведем правую часть к общему знаменателю и отбросим знаменатели, одинаковые у получившихся дробей:

$$p^2+6=A(p-2)(p^2+4)+B(p-1)(p^2+4)+(Mp+N)(p-1)(p-2). \quad (13.6)$$

Из этого равенства и находятся неопределенные пока коэффициенты A,B,M,N. Сделать это можно либо подставляя в (13.6) конкретные значения p, либо раскрывая скобки в правой части (13.6), группируя слагаемые с p^3,p^2,p^1,p^0 и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в левой и правой частях получившегося равенства. На практике наиболее удобным является сочетание этих приемов. Начнем с подстановки таких значений p, при которых одна из скобок в правой части (13.6) обращается в нуль, т.е. $p=1$ и $p=2$. Как мы увидим, каждая такая подстановка позволяет сразу найти один из коэффициентов.

При $p=1$ имеем $1^2+6=A(1-2)(1^2+4)+B\cdot 0+(M\cdot 1+N)\cdot 0$, т.е.

$$7=-5A, \text{ откуда } A=-\frac{7}{5}.$$

При $p=2$ получаем $2^2+6=0+B\cdot 1\cdot(2^2+4)+0$, т.е.

$$10=8B,\ B=\frac{5}{4}.$$

После этого можно подставлять в (13.6) любые другие значения p и получать уравнения относительно оставшихся неизвестных. Например, при $p=0$ получим $6=A(-2)\cdot 4+B(-1)\cdot 4+N(-1)(-2)$, т.е. $6=-8A-4B+2N$, откуда

$$2N=6+8A+4B=6+8\left(-\frac{7}{5}\right)+4\cdot\frac{5}{4}=11-\frac{56}{5}=-\frac{1}{5},\ N=-\frac{1}{10}.$$

Для определения оставшегося неизвестного M можно подставить в (13.6) любое другое значение p. Но удобнее приравнять

коэффициенты при p^3. Если мы раскроем скобки в (13.6), то слагаемыми с p^3 будут только $Ap^3 + Bp^3 + Mp^3$ (остальные слагаемые содержат p в меньшей степени). Поэтому коэффициентом при p^3 справа будет $A + B + M$; слева слагаемое с p^3 отсутствует, поэтому соответствующий коэффициент равен нулю. Имеем

$$A + B + M = 0,\ M = -A - B = \frac{7}{5} - \frac{5}{4} = \frac{3}{20};\ M = \frac{3}{20}.$$

Итак, все коэффициенты определены и разложение дроби $Y(p)$ в сумму простейших получено:

$$\frac{p^2+6}{(p^2-3p+2)(p^2+4)} = -\frac{7}{5}\cdot\frac{1}{p-1} + \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p-2} + \frac{3}{20}\cdot\frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{p^2+4}.$$

Пользуясь линейностью и формулами 2, 4, 3 таблицы, легко находим оригинал $y(t)$ (по формуле 3 $\sin 2t \doteq \frac{2}{p^2+4}$, откуда $\frac{1}{2}\sin 2t \doteq \frac{1}{p^2+4}$):

$$y(t) = -\frac{7}{5}e^t + \frac{5}{4}e^{2t} + \frac{3}{20}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t. \qquad (13.7)$$

Тем самым задача Коши, поставленная в примере 13.1, решена.

Второй способ нахождения оригинала по известному изображению основан на использовании теории вычетов.

***Теорема 13.3* (теорема о разложении).** Если изображение $Y(p)$ является дробно-рациональной функцией, то ее оригинал $y(t)$ находится по формуле

$$y(t) = \sum_k res_{p_k}(Y(p)e^{pt}), \qquad (13.8)$$

т.е. функция $y(t)$ равна сумме вычетов функции $Y(p)e^{pt}$, вычисленных во всех полюсах p_k функции $Y(p)$.

Доказательство. Пусть σ_0 – индекс роста функции-оригинала $y(t)$. Возьмем любое число $\sigma > \sigma_0$. Функция-изображение $Y(p)$

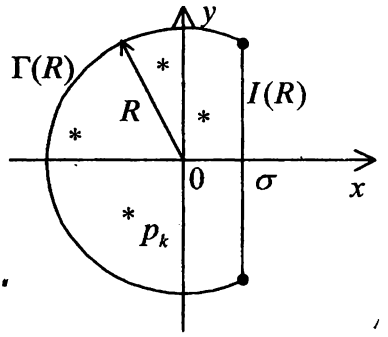


Рис. 16

аналитична при $\operatorname{Re} p > \sigma_0$. Следовательно, все ее полюсы лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0 < \sigma$. Так как этих полюсов конечное число, то для достаточно больших значений R все полюсы будут находиться в области, ограниченной дугой окружности $|p| = R$ и отрезком $\operatorname{Re} p = \sigma$ (рис.16). Обозначим эту дугу через $\Gamma(R)$, а отрезок – через $I(R)$; по теореме Пифагора $I(R) = [\sigma - i\sqrt{R^2 - \sigma^2}; \sigma + i\sqrt{R^2 - \sigma^2}]$. Согласно основной теореме о вычетах (теорема 8.1, формула (8.2)),

$$\sum_k res_{p_k}(Y(p)e^{pt}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{I(R)\cup\Gamma(R)} Y(p)e^{pt}dp =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{I(R)} Y(p)e^{pt}dp + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma(R)} Y(p)e^{pt}dp,$$

причем это равенство выполнено при всех достаточно больших значениях R и левая часть (сумма вычетов) не зависит от R. Переходя к пределу при $R \to \infty$, получаем

$$\sum_k res_{p_k}(Y(p)e^{pt}) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{I(R)} Y(p)e^{pt}dp + \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma(R)} Y(p)e^{pt}dp. \quad (13.9)$$

Покажем, что

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma(R)} Y(p)e^{pt}dp = 0. \quad (13.10)$$

С этой целью в интеграле из (13.10) сделаем замену переменной: $z = -ip$, откуда $p = iz$, $dp = idz$. При умножении на $-i$ плоскость переменного p поворачивается на угол $\pi/2$ по часовой стрелке. Прямая $\operatorname{Re} p = \sigma$ перейдет в горизонтальную прямую $\operatorname{Im} z = -\sigma$, полуплоскость $\operatorname{Re} p < \sigma$ – в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > -\sigma$, а дуга

$\Gamma(R)$ – в дугу $\gamma(R)$, лежащую в этой полуплоскости (см. рис.10). Мы получаем

$$\int_{\Gamma(R)} Y(p)e^{pt}dp = i\int_{\gamma(R)} Y(iz)e^{izt}dz.$$

У дробно-рациональной функции-изображения $Y(p)$ степень числителя должна быть строго меньше степени знаменателя (иначе будет нарушаться свойство 2° о поведении изображения при $p \to \infty$). Значит, $Y(p) \to 0$, когда $p \to \infty$ произвольным образом (а не только так, что $\operatorname{Re} p \to +\infty$). Поэтому $\lim\limits_{z\to+\infty} Y(iz) = 0$. Таким образом, выполнены все условия теоремы 9.6 (леммы Жордана), в силу которой (см. (9.5))

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma(R)} Y(iz)e^{izt}dz = 0,$$

откуда и следует равенство (13.10). Из (13.10) и (13.9) имеем

$$\sum_k res_{p_k}(Y(p)e^{pt}) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{l(R)} Y(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y(p)e^{pt}dp.$$

По формуле обращения (11.9) правая часть этой цепочки равна оригиналу $y(t)$ функции-изображения $Y(p)$. Тем самым формула (13.8) доказана.

Найдем оригинал функции $Y(p)$ из примера 13.2 вторым способом.

Пример 13.4. С помощью вычетов найти оригинал функции

$$Y(p) = \frac{p^2+6}{(p^2-3p+2)(p^2+4)}.$$

Решение. Функция $Y(p)e^{pt} = \dfrac{(p^2+6)e^{pt}}{(p-1)(p-2)(p-2i)(p+2i)}$ имеет четыре особые точки 1, 2, $2i$, $-2i$, каждая из которых является полюсом первого порядка. Поэтому вычеты в этих точках можно найти либо по формуле (8.5), либо по формуле (8.6). Воспользуемся, например, (8.5). Имеем:

$$res_1(Y(p)e^{pt}) = \lim_{p\to 1}\frac{(p-1)(p^2+6)e^{pt}}{(p-1)(p-2)(p^2+4)} = \lim_{p\to 1}\frac{(p^2+6)e^{pt}}{(p-2)(p^2+4)} =$$

$$= \frac{(1+6)e^{t}}{(1-2)(1+4)} = -\frac{7}{5}e^{t};$$

$$res_2(Y(p)e^{pt}) = \lim_{p\to 2}\frac{(p-2)(p^2+6)e^{pt}}{(p-1)(p-2)(p^2+4)} = \lim_{p\to 2}\frac{(p^2+6)e^{pt}}{(p-1)(p^2+4)} =$$

$$= \frac{(4+6)e^{2t}}{(2-1)(4+4)} = \frac{5}{4}e^{2t};$$

$$res_{2i}(Y(p)e^{pt}) = \lim_{p\to 2i}\frac{(p-2i)(p^2+6)e^{pt}}{(p^2-3p+2)(p-2i)(p+2i)} =$$

$$= \frac{((2i)^2+6)e^{2it}}{((2i)^2-6i+2)(2i+2i)} = \frac{(-4+6)e^{2it}}{(-2-6i)4i} = \frac{e^{2it}}{4(3-i)} = \frac{(3+i)e^{2it}}{40};$$

$$res_{-2i}(Y(p)e^{pt}) = \lim_{p\to -2i}\frac{(p+2i)(p^2+6)e^{pt}}{(p^2-3p+2)(p-2i)(p+2i)} =$$

$$= \frac{((-2i)^2+6)e^{-2it}}{((-2i)^2+6i+2)(-2i-2i)} = \frac{(-4+6)e^{-2it}}{(-2+6i)(-4i)} = \frac{e^{-2it}}{4(3+i)} = \frac{(3-i)e^{-2it}}{40}.$$

По теореме 13.3 оригинал $y(t)$ равен сумме найденных вычетов:

$$y(t) = -\frac{7}{5}e^{t} + \frac{5}{4}e^{2t} + \frac{(3+i)e^{2it}}{40} + \frac{(3-i)e^{-2it}}{40}.$$

Сумма двух последних вычетов равна:

$$\frac{3}{40}e^{2it} + \frac{i}{40}e^{2it} + \frac{3}{40}e^{-2it} - \frac{i}{40}e^{-2it} = \frac{3}{40}(e^{2it}+e^{-2it}) + \frac{i}{40}(e^{2it}-e^{-2it}) =$$

$$= \frac{3}{20}\cos 2t - \frac{1}{20}\sin 2t.$$

Поэтому найденный оригинал совпадает с (13.7).

В файле материалов будут приведены другие примеры отыскания оригиналов.

Полученная функция-оригинал $y(t)$ является решением дифференциального уравнения лишь при $t \geq 0$, поскольку любая функция-оригинал равна нулю при $t < 0$. Но по теореме о существовании и единственности решения задачи Коши функция $y(t)$ будет решением на всей числовой прямой, если ее определить по формуле (13.7) и при $t < 0$.

Отметим применение интеграла Дюамеля (12.23) к решению дифференциальных уравнений. Пусть требуется решить линейное дифференциальное уравнение (13.1) с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях, т.е. $y(0) = y'(0) = ... = y^{(n-1)} = 0$. Мы покажем, что если известно решение $y_1(t)$ уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 1 \qquad (13.11)$$

с той же левой частью, что и в (13.1), и также при нулевых начальных условиях, то интеграл Дюамеля позволяет выписать решение $y(t)$ уравнения (13.1). Для этого перейдем от уравнений (13.1), (13.11) к соответствующим операторным уравнениям. Имеем $y(t) \doteqdot Y(p)$, $y_1(t) \doteqdot Y_1(p)$, и в силу формулы 1 таблицы $1 \doteqdot \frac{1}{p}$. Поскольку начальные условия нулевые, то функция $B(p)$ в (13.5) равна нулю. Из (13.5) получаем

$$Y(p) = \frac{F(p)}{A(p)}, \; Y_1(p) = \frac{1}{pA(p)},$$

откуда $Y(p) = pF(p)Y_1(p)$. Применим теперь формулу Дюамеля (12.23), в которой положим $G(p) = Y_1(p)$, $g(t) = y_1(t)$, $g(0) = y_1(0) = 0$. Тогда

$$Y(p) = pF(p)Y_1(p) \doteqdot \int_0^t f(\tau) y_1'(t-\tau) d\tau .$$

Так как $Y(p) \doteqdot y(t)$, то

$$y(t)=\int_0^t f(\tau)y_1'(t-\tau)d\tau\,. \qquad (13.12)$$

Метод решения дифференциальных уравнений, основанный на формуле Дюамеля, применяют в тех случаях, когда возникают трудности при нахождении изображения $F(p)$ правой части $f(t)$ уравнения (13.1) (примеры приведены в файле материалов).

Формула (13.12) удобна в случае, когда требуется решить несколько дифференциальных уравнений с нулевыми начальными условиями и одинаковыми левыми частями, но различными правыми частями $f(t)$. Тогда достаточно решить уравнение лишь при $f(t)=1$; решения уравнений с другими $f(t)$ сразу находятся по формуле (13.12). В радиофизике функция $f(t)$ интерпретируется как входной сигнал, а $y(t)$ – как реакция системы. Таким образом, зная реакцию системы на единичный сигнал, можно найти ее реакцию на любой другой сигнал $f(t)$.

Решение систем дифференциальных уравнений операционным методом.

Совершенно аналогично применяется операционное исчисление и к решению систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Пусть, например, нужно решить систему из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $x(t)$ и $y(t)$ и заданными начальными условиями. Тогда от оригиналов $x(t)$, $y(t)$ переходят к их изображениям $X(p)$ и $Y(p)$. От каждого уравнения системы переходят к операторному уравнению. Получается система операторных уравнений, являющаяся системой линейных алгебраических уравнений относительно $X(p)$ и $Y(p)$. Решив эту систему и найдя $X(p)$, $Y(p)$, мы восстанавливаем их оригиналы $x(t)$ и $y(t)$. Проиллюстрируем сказанное на примере.

Пример 13.5. Найти решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x'=-x+3y+1 \\ y'=x+y \end{cases}$ при начальных условиях $x(0)=1,\ y(0)=2$.

Р е ш е н и е. Пользуясь соотношениями 20 и 1 таблицы, перейдем

к операторным уравнениям:

$$\begin{cases} pX-1=-X+3Y+\dfrac{1}{p} \\ pY-2=X+Y \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (p+1)X-3Y=\dfrac{1}{p}+1 \\ -X+(p-1)Y=2 \end{cases}$$

Получили систему линейных уравнений относительно X и Y, решать которую можно различными способами: 1) выразить X из второго уравнения и подставить в первое; 2) домножить второе уравнение на $(p+1)$ и сложить с первым (при этом слагаемые, содержащие X, сократятся); 3) использовать формулы Крамера. Чтобы напомнить читателю эти формулы, применим их к решению системы. Из коэффициентов при X и Y составим определитель Δ:

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+1 & -3 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix}=(p+1)(p-1)-(-1)(-3)=p^2-1-3=p^2-4.$$

Последовательно заменяя первый и второй столбцы этого определителя столбцом из правых частей уравнений, получим соответственно определители Δ_X и Δ_Y:

$$\Delta_X=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{p}+1 & -3 \\ 2 & p-1 \end{vmatrix}=(\frac{1}{p}+1)(p-1)-2\cdot(-3)=1+p-\frac{1}{p}-1+6=$$

$$=\frac{p^2+6p-1}{p};$$

$$\Delta_Y=\begin{vmatrix} p+1 & \dfrac{1}{p}+1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2(p+1)-(-1)(\frac{1}{p}+1)=2p+2+\frac{1}{p}+1=$$

$$=\frac{2p^2+3p+1}{p}.$$

Теперь X и Y находятся по формулам Крамера:

$$X=\frac{\Delta_X}{\Delta}=\frac{p^2+6p-1}{p(p^2-4)},\quad Y=\frac{\Delta_Y}{\Delta}=\frac{2p^2+3p+1}{p(p^2-4)}.$$

Осталось от полученных изображений перейти к оригиналам. Сделать это можно двумя способами: методом неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов. Чтобы еще раз продемонстрировать оба эти приема, найдем $x(t)$ первым способом, а $y(t)$ – вторым.

Разложение X в сумму простейших дробей имеет вид

$$\frac{p^2+6p-1}{p(p-2)(p+2)}=$$

$$=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p+2}=\frac{A(p-2)(p+2)+Bp(p+2)+Cp(p-2)}{p(p-2)(p+2)}$$

(каждый множитель знаменателя является множителем вида $(ap-b)^k$ с $k=1$). Отсюда

$$p^2+6p-1=A(p-2)(p+2)+Bp(p+2)+Cp(p-2).$$

При $p=0$ получаем $-1=-4A$, откуда $A=\frac{1}{4}$;

при $p=2$ получаем $4+12-1=B\cdot 2\cdot 4$, откуда $B=\frac{15}{8}$;

при $p=-2$ получаем $4-12-1=C(-2)(-4)$, откуда $C=-\frac{9}{8}$.

Таким образом, $X=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{p+2}$. По формулам 1 и 2 таблицы и свойству линейности находим оригинал:

$$x(t)=\frac{1}{4}+\frac{15}{8}e^{2t}-\frac{9}{8}e^{-2t}.$$

Оригинал $y(t)$ найдем по формуле (13.8). Функция

$$Y(p)e^{pt} = \frac{(2p^2+3p+1)e^{pt}}{p(p^2-4)} = \frac{(2p^2+3p+1)e^{pt}}{p(p-2)(p+2)}$$

имеет особые точки 0, 2 и –2, каждая из которых является полюсом первого порядка. Вычеты в этих точках найдем по формуле (8.5) (можно использовать и (8.6)):

$$res_0\left(Y(p)e^{pt}\right) = \lim_{p\to 0}\frac{p(2p^2+3p+1)e^{pt}}{p(p-2)(p+2)} = \lim_{p\to 0}\frac{(2p^2+3p+1)e^{pt}}{(p-2)(p+2)} = -\frac{1}{4};$$

$$res_2\left(Y(p)e^{pt}\right) = \lim_{p\to 2}\frac{(2p^2+3p+1)e^{pt}}{p(p+2)} = \frac{(8+6+1)e^{2t}}{2\cdot 4} = \frac{15}{8}e^{2t};$$

$$res_{-2}\left(Y(p)e^{pt}\right) = \lim_{p\to -2}\frac{(2p^2+3p+1)e^{pt}}{p(p-2)} = \frac{(8-6+1)e^{2t}}{-2\cdot(-4)} = \frac{3}{8}e^{-2t}.$$

Следовательно,

$$y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{15}{8}e^{2t} + \frac{3}{8}e^{-2t}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты и перечень основных зависимостей и формул.

2. Решите самостоятельно следующие задачи.

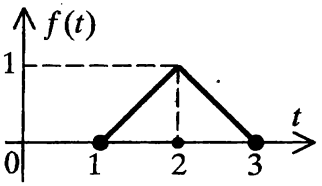
Вариант 1

1. Найти разложение функции $f(z)=\left(\frac{\sin z}{z}\right)'$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$ и указать круг сходимости.

2. Найти все лорановские разложения функции $f(z)=\frac{z-2}{(z-1)(z+3)}$ по степеням $z-1$.

3. Определить тип особой точки $z_0=0$ функции $f(z)=\frac{e^{2z}-1}{\cos z-1+\frac{z^2}{2}}$.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+5)dx}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$.



5. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение.

6. Найти оригинал изображения $F(p)=\frac{1}{(p^2+2p+5)^2}$ и сделать проверку, найдя изображение полученного оригинала.

7. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}x'=x+4y\\y'=2x-y+9\end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=1,\ y(0)=0$.

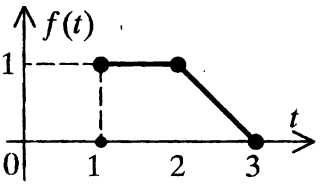
Вариант 2

1. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z+6}{z(z+3)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=-1$ и указать круг сходимости полученного ряда.

2. Найти разложение функции $f(z)=e^{\frac{z}{z-2}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$. Указать кольцо сходимости, правильную и главную части разложения, а также тип особой точки z_0.

3. Найти все изолированные особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z^2-4)^3}$ и определить их тип.

4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3+\sqrt{5}\sin t}$.



5. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение.

6. Двумя способами (с помощью теоремы умножения и по формуле 11 таблицы) найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+16)^2}$.

7. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=x+2y+1 \\ y'=4x-y \end{cases},$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=0,\ y(0)=1$.

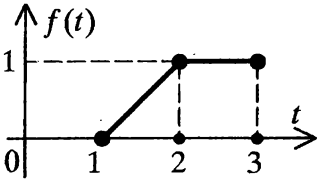
Вариант 3

1. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z-1}{(z+1)(z-3)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=2$ и указать круг сходимости полученного ряда.

2. Найти разложение функции $f(z)=(z-3)\sin\dfrac{2}{z-3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=3$. Указать кольцо сходимости, правильную и главную части разложения, а также тип особой точки z_0.

3. Найти все изолированные особые точки функции $f(z)=\dfrac{\cos\dfrac{1}{z-1}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ и определить их тип.

4. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{(x^2+1)dx}{(x^2+4x+13)^2}$.



5. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение.

6. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)^2}$ и сделать проверку, найдя изображение полученного оригинала.

7. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}x'=2x+5y\\ y'=x-2y+2\end{cases},$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=1,\ y(0)=1$.

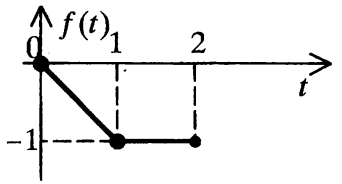
Вариант 4

1. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=1$ и указать круг сходимости полученного ряда.

2. Найти разложение функции $f(z)=\dfrac{1}{z}\cos\dfrac{3}{z^2}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=0$. Указать кольцо сходимости, правильную и главную части разложения, а также тип особой точки z_0.

3. Найти все изолированные особые точки функции $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+16)^3}$ и определить их тип.

4. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3\sin t+5}$.



5. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение.

6. Используя интеграл Дюамеля, найти решение дифференциального уравнения $y''-2y'+y=\dfrac{e^t}{t^2+4}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\ y'(0)=0$.

7. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'=-2x+5y+1 \\ y'=x+2y+1 \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0)=0,\ y(0)=2$.

Вариант 5

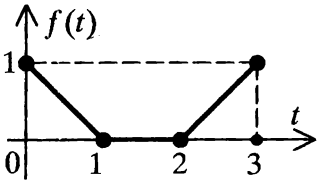
1. Найти разложение функции $f(z)=\int_0^z e^{-t^2}dt$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$ и указать круг сходимости.

2. Найти все лорановские разложения функции $f(z)=\dfrac{z-1}{z(z+1)}$ по степеням $z+1$.

3. Определить тип особой точки $z_0=0$ функции

$$f(z)=\frac{\sin 8z-6z}{\cos z-1+\dfrac{z^2}{2}}.$$

4. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+4}{(x^2+9)^2}dx$.



5. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение.

6. Используя интеграл Дюамеля, найти решение дифференциального уравнения $y''-6y'+9y=\dfrac{e^{3t}}{t^2+1}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\ y'(0)=0$.

7. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}x'=3x+y\\ y'=-5x-3y+2\end{cases}$$

при начальных условиях $x(0)=2,\ y(0)=0$.

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №1

Задание

Разложить дробно-рациональную функцию $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=3$ и указать кольцо сходимости.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Сделать замену переменной $w=z-z_0$, подставить $z=w+z_0$ в $f(z)$ и получить функцию $g(w)=f(w+z_0)$.	$z_0=3$, $w=z-3$, $z=w+3$. Подставляя $z=w+3$ в $f(z)$, получаем $g(w)=\dfrac{w+3-2}{(w+3+1)w}=\dfrac{w+1}{(w+4)w}$.
2.	Разложить рациональную дробь $g(w)$ в сумму простейших дробей.	Разложение функции $g(w)$ в сумму простейших дробей имеет вид $\dfrac{w+1}{w(w+4)}=\dfrac{A}{w}+\dfrac{B}{w+4}$, т.к. каждый множитель знаменателя является функцией типа $(aw+b)^k$ с $k=1$ (подробнее о разложении в сумму простейших дробей см. §13). Для нахождения коэффициентов A и B приведем правую часть равенства к общему знаменателю и приравняем числители получившихся дробей:

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		$w+1=A(w+4)+Bw$. При $w=0$ имеем $1=4A$, т.е. $A=1/4$; при $w=-4$ имеем $-3=-4B$, т.е. $B=3/4$. Получаем нужное разложение: $g(w)=\frac{w+1}{w(w+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{w}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{w+4}$.
3	Используя формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{1}{1-q}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n$, $\lvert q\rvert<1$, получить разложение функции $g(w)$ в ряд Лорана: $g(w)=$ $=\sum_{n=-N}^{-1}c_n w^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n w^n$.	Слагаемое $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{w}$ дает первую (главную) часть ряда Лорана. Для получения второй (правильной) части разложения представим дробь $\frac{1}{w+4}$ в виде $\frac{1}{1-q}$: $\frac{1}{w+4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{w}{4}\right)}=$ $=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}w^n$; здесь $q=-\frac{w}{4}$, $\lvert q\rvert=\frac{\lvert w\rvert}{4}<1$, откуда $\lvert w\rvert<4$. $g(w)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{w}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3}{4^{n+2}}w^n$, $0<\lvert w\rvert<4$.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
4	Сделать обратную замену $w = z - z_0$ и получить разложение функции $f(z)$: $f(z) = \sum_{n=-N}^{-1} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.	$w = z-3$; $f(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{4^{n+2}} (z-3)^n$, $0 < \lvert z-3\rvert < 4$.

Решите самостоятельно:

1.1. Разложить дробно-рациональную функцию $f(z) = \dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$

в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 1$ и указать кольцо сходимости.

$z_0 = 3$ $\quad g(w) = \frac{w-3+2}{(w-3-1)w} = \frac{1}{(w-4)w}$

$w = z+3$

$z = w-3$

$\frac{w+1}{w(w-4)} = \frac{A}{w} + \frac{B}{w-4}$

$w+1 = A(w-4) + Bw \qquad w=0 \quad 1 = 4A$ i.e. $A = 1/4$

$w = 4 \quad -3 = -4B$ i.e. $B = 3/4$

$g(w) = \frac{w+1}{w(w-4)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{w} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{w-4}$

$\frac{1}{w-4}$ в виде $\frac{1}{1-q}$

$\frac{1}{w-4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{w}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{w}{4})} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}w^n$;

$q = -\frac{w}{4}$; $|q| = \frac{|w|}{4} < 1 \Rightarrow |w| < 4$

$g(w) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{w} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3}{4^{n+2}}w^n$

$0 < |w| < 4$

$w = z+3$

$f(z) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+3} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3}{4^{n+2}}(z+3)^n$

$0 < |z+3| < 4$.

1.2. Разложить дробно-рациональную функцию $f(z)=\dfrac{z+2}{(z-1)(z+3)}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-3$ и указать кольцо сходимости.

1.3. Разложить дробно-рациональную функцию $f(z)=\dfrac{2z}{z^2-4}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=2$ и указать кольцо сходимости.

1.4. Разложить дробно-рациональную функцию $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2-4z+3}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=3$ и указать кольцо сходимости.

$$(z^2-4z+4)-1z(z-1)^1-1^1=$$

$$=(z-1-1)(z-1+1)$$

1.5. Разложить дробно-рациональную функцию $f(z)=\dfrac{2z}{z^2+1}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=i$ и указать кольцо сходимости.

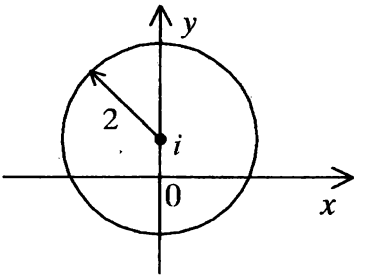
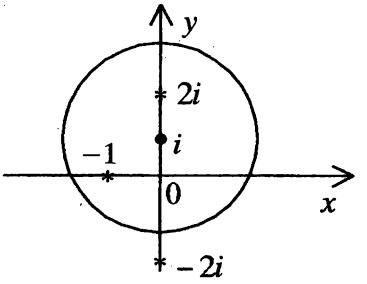
2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №2

Задание

Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-i|=2} \frac{z^4 dz}{(z^2+4)(z+1)^2}$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1	Изобразить контур интегрирования на комплексной плоскости.	Контур $\Gamma = \{\|z-i\| = 2\}$ является окружностью с центром $z_0 = i$ радиуса 2. 
2	Найти все особые точки функции, попавшие внутрь контура, и исследовать их характер.	 Функция $f(z) = \frac{z^4}{(z^2+4)(z+1)^2}$

0,3

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		имеет три особые точки $z_1 = -1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$; из них z_1 и z_2 лежат внутри контура, а z_3 – вне его. Из следствия 7.4 легко получаем, что z_1 является полюсом второго порядка, а z_2 – полюсом первого порядка.
3	В каждой из этих особых точек найти вычет функции $f(z)$.	Вычет в точке z_2 найдем по формуле (8.5): $res_{2i} f = \lim\limits_{z \to 2i} (z-2i) f(z) =$ $= \lim\limits_{z \to 2i} \dfrac{(z-2i)z^4}{(z-2i)(z+2i)(z+1)^2} =$ $= \dfrac{(2i)^4}{(2i+2i)(2i+1)^2} = \dfrac{16}{4i(-3+4i)} =$ $= \dfrac{4}{-4-3i} = \dfrac{4(-4+3i)}{25}.$ Для вычисления вычета в точке -1 применим формулу (8.7) с $n=2$: $res_{z_0} f = \lim\limits_{z \to z_0} \left((z-z_0)^2 f(z)\right)';$ $\left((z-z_0)^2 f(z)\right)' =$ $= \left(\dfrac{(z+1)^2 z^4}{(z^2+4)(z+1)^2}\right)' = \left(\dfrac{z^4}{z^2+4}\right)' =$ $= \dfrac{4z^3(z^2+4) - z^4 \cdot 2z}{(z^2+4)^2} = \dfrac{2z^3(z^2+8)}{(z^2+4)^2}$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		$res_{-1} f = \lim\limits_{z\to -1} \dfrac{2z^3(z^2+8)}{(z^2+4)^2} =$ $= \dfrac{-2\cdot 9}{5^2} = -\dfrac{18}{25}.$
4.	Используя основную теорему о вычетах, найти искомый интеграл по формуле: $\int\limits_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z).$	$\int\limits_{\lvert z-i\rvert=2} \dfrac{z^4 dz}{(z^2+4)(z+1)} =$ $= 2\pi i\left(\dfrac{4(-4+3i)}{25} - \dfrac{18}{25}\right) =$ $= -\dfrac{4\pi}{25}(6+17i).$

Решите самостоятельно:

2.1. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z+2i|=3} \dfrac{z^4+1}{z^2(z^2+9)}dz$.

$\dfrac{z^4+1}{z^2(z^2+3)(z-3)} = \dfrac{3^4+1}{z^2(z+3)(z-3)} = \dfrac{82}{9}$

2.2. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=3} \frac{z^4 dz}{(z^2+4)(z+1)^2}$.

2.3. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z-1|=3} \frac{z^4 dz}{(z^2-9)(z-i)}$.

2.4. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=2} \frac{z^8}{(z^2-1)^2} dz$.

2.5. Вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=5} \frac{e^z dz}{z^2(z-i\pi)}$.

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №3

Задание

Вычислить вычет функции $f(z)=(z+2)e^{-\frac{1}{z}}$ в бесконечно удаленной точке.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1	Установить, является ли особая точка $z_0=\infty$ изолированной. Для этого проверить, существует ли окрестность точки $z_0=\infty$ – внешность окружности $\|z\|=R$, в которой нет других особых точек, кроме $z_0=\infty$.	Функция $f(z)=(z+2)e^{-\frac{1}{z}}$ имеет единственную конечную особую точку $z_1=0$. Поэтому во внешности любой окружности $\|z\|=R$ (например, в $\|z\|>1$) нет особых точек, кроме $z_0=\infty$.
2	Сделать замену переменной $w=\frac{1}{z}$, подставить $z=\frac{1}{w}$ в $f(z)$ и получить функцию $g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)$.	$g(w)=f\left(\frac{1}{w}\right)=\left(\frac{1}{w}+2\right)e^{-w}$.
3	Найти коэффициент при w^1 в лорановском разложении функции $g(w)$ по степеням w^n. Этот коэффициент будет коэффициентом c_{-1} при z^{-1}	Используем известное разложение функции e^z по степеням z^n (формула (4.11)): $e^z=1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
	в разложении Лорана функции $f(z)$ по степеням z^n.	Подставляя вместо z в эту формулу $-w$, получаем: $g(w) =$ $= \left(\frac{1}{w}+2\right)\left(1+(-w)+\frac{(-w)^2}{2}+\ldots\right) =$ $= \frac{1}{w}+2-1-2w+\frac{w}{2}+w^2-\ldots =$ $= \frac{1}{w}+1-\frac{3}{2}w+w^2-\ldots$ (оставшиеся слагаемые содержат степени w не ниже второй). Коэффициент при w^1 равен $c_{-1}=-\frac{3}{2}$.
4	Найти искомый вычет $res_{\infty} f = -c_{-1}$	$res_{\infty} f = -c_{-1} = \frac{3}{2}$

Решите самостоятельно:

3.1. Вычислить вычет функции $f(z)=(z+3)\sin\frac{1}{z}$ в бесконечно удаленной точке.

3.2. Вычислить вычет функции $f(z)=(z-1)\cos\frac{2}{z}$ в бесконечно удаленной точке.

3.3. Вычислить вычет функции $f(z)=e^{-\frac{2}{z}}+z^3+z-2$ в бесконечно удаленной точке.

3.4. Вычислить вычет функции $f(z) = z^3 \cos\frac{1}{z}$ в бесконечно удаленной точке.

3.5. Вычислить вычет функции $f(z) = \frac{5}{z} + \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)$ в бесконечно удаленной точке.

4. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №4

Задание

Двумя способами (используя метод неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов) найти оригинал дробно-рациональной функции $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
А. *С использованием метода неопределенных коэффициентов*		
1	Разложить дробно-рациональную функцию $F(p)$ в сумму простейших дробей.	Так как уравнение $p^2+4p+5=0$ действительных корней не имеет, то разложение функции $F(p)$ в сумму простейших дробей имеет вид: $\dfrac{2p+1}{(p+1)(p^2+4p+5)}=$ $=\dfrac{A}{p+1}+\dfrac{Mp+N}{p^2+4p+5}$ (можно было разложить квадратный трехчлен p^2+4p+5 на множители $(p-p_1)(p-p_2)$ с комплексными p_1 и p_2, но это менее удоб-

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		но). Приводя правую часть к общему знаменателю, равному знаменателю левой части, и приравнивая числители дробей в левой и правой частях, получим $2p+1=A(p^2+4p+5)+$ $+(Mp+N)(p+1).$ Подставляя $p=-1$, имеем $-1=A(1-4+5)$, $-1=2A$, $A=-\frac{1}{2}$. При $p=0$ получаем $1=5A+N$, откуда $N=1-5A=1+\frac{5}{2}=\frac{7}{2}$. Приравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, имеем $0=A+M$, $M=-A=$ $=\frac{1}{2}$. Итак, $\frac{2p+1}{(p+1)(p^2+4p+5)}=$ $=-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}+\frac{\frac{1}{2}p+\frac{7}{2}}{p^2+4p+5}$.
2	Для каждой простейшей дроби найти оригинал, используя таблицу соответствия оригиналов и изображений.	По формуле 2 таблицы с $a=-1$ получаем $\frac{1}{p+1}\doteqdot e^{-t}$. Так как $p^2+4p+5=p^2+4p+4+$ $+1=(p+2)^2+1$, то

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		$\frac{\frac{1}{2}p+\frac{7}{2}}{p^2+4p+5}=\frac{\frac{1}{2}(p+2-2)+\frac{7}{2}}{(p+2)^2+1}=$ $=\frac{\frac{1}{2}(p+2)-1+\frac{7}{2}}{(p+2)^2+1}=\frac{\frac{1}{2}(p+2)+\frac{5}{2}}{(p+2)^2+1}=$ $=\frac{1}{2}\frac{(p+2)}{(p+2)^2+1}+\frac{5}{2}\frac{(p+2)}{(p+2)^2+1}.$ По формуле 8 таблицы с $a=-2$ и $\omega=1$ получаем $\frac{p+2}{(p+2)^2+1}\doteqdot e^{-2t}$; по формуле 7 с теми же a и ω $\frac{1}{(p+2)^2+1}\doteqdot e^{-2t}$.
3	Используя свойство линейности преобразования Лапласа, найти оригинал $f(t)$ заданной функции-изображения $F(p)$.	Так как $F(p)=-\frac{1}{2}\frac{1}{p+1}+$ $+\frac{1}{2}\frac{p+2}{(p+2)^2+1}+\frac{5}{2}\frac{1}{(p+2)^2+1}$, то $f(t)=-\frac{1}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t+$ $+\frac{5}{2}e^{-2t}\sin t$.
	В. *С помощью вычетов*	
1	Найти нули знаменателя дроби $F(p)$, являющиеся полю-	Решим уравнение $p^2+4p+5=0$.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
	сами функции $F(p)$. Разложить знаменатель на линейные множители и определить порядки этих полюсов.	$D=16-4\cdot5=-4$; $p_1=\frac{-4+2i}{2}=-2+i$, $p_2=\frac{-4-2i}{2}=-2-i$. Поэтому $p^2+4p+5=(p+2-i)(p+2+i)$, $F(p)=\frac{2p+1}{(p+1)(p+2-i)(p+2+i)}$. Функция $F(p)$ имеет три особые точки: $p_1=-2+i$, $p_2=-2-i$, $p_3=-1$, каждая из которых является полюсом первого порядка.
2	Найти вычеты функции $F(p)e^{pt}$ в каждом из полюсов p_k по формуле (8.5) либо (8.6) для полюса первого порядка и по формуле (8,7) для полюса порядка $n>1$.	По формуле (8.5): $res_{-1}\left(F(p)e^{pt}\right)=$ $=\lim\limits_{p\to-1}\frac{(p+1)(2p+1)e^{pt}}{(p+1)(p+2-i)(p+2+i)}=$ $=\lim\limits_{p\to-1}\frac{(2p+1)e^{pt}}{(p+2-i)(p+2+i)}=$ $=\frac{-1e^{-t}}{(1-i)(1+i)}=-\frac{1}{2}e^{-t}$; $res_{-2+i}\left(F(p)e^{pt}\right)=$ $=\lim\limits_{p\to-2+i}\frac{(p+2-i)(2p+1)e^{pt}}{(p+1)(p+2-i)(p+2+i)}=$ $=\lim\limits_{p\to-2+i}\frac{(2p+1)e^{pt}}{(p+1)(p+2+i)}=$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		$= \frac{(-3+2i)e^{(-2+i)t}}{(-1+i)\cdot 2i} = \frac{(-3+2i)e^{(-2+i)t}}{-2(1+i)} =$ $= \frac{(-3+2i)(1-i)e^{(-2+i)t}}{-2(1+i)(1-i)} =$ $= \frac{(1-5i)e^{(-2+i)t}}{4};$ $res_{-2-i}\left(F(p)e^{pt}\right) =$ $= \lim_{p\to -2-i} \frac{(2p+1)e^{pt}}{(p+1)(p+2-i)} =$ $= \frac{(-3-2i)e^{(-2-i)t}}{(-1-i)(-2i)} =$ $= \frac{(-3-2i)(-1-i)e^{(-2-i)t}}{2(-1+i)(-1-i)} =$ $= \frac{(1+5i)e^{(-2-i)t}}{4}.$
3	Найти искомый оригинал $f(t)$ по формуле $f(t) = \sum_k res_{p_k}(F(p)e^{pt}).$	$f(t) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{(1-5i)e^{(-2+i)t}}{4} +$ $+ \frac{(1+5i)e^{(-2-i)t}}{4} = -\frac{1}{2}e^{-t} +$ $+ \frac{1}{4}e^{-2t}((1-5i)e^{it} + (1+5i)e^{-it}) =$ $= -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t}(e^{it} + e^{-it} - 5i(e^{it} -$

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		$-e^{-it})) = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{-2t}(2\cos t -$ $-5i \cdot 2i \sin t) = -\frac{1}{2}e^{-t} +$ $+\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t + \frac{5}{2}e^{-2t}\sin t.$

Решите самостоятельно:

4.1. Двумя способами (используя метод неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов) найти оригинал функции

$$F(p) = \frac{p+4}{(p-2)(p^2+2p+2)}.$$

4.2. Двумя способами (используя метод неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов) найти оригинал функции

$$F(p)=\frac{2}{p^2(p+1)}.$$

4.3. Двумя способами (используя метод неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов) найти оригинал функции

$$F(p)=\frac{p+10}{p^3-6p^2+10p}.$$

4.4. Двумя способами (используя метод неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов) найти оригинал функции

$$F(p)=\frac{2p+1}{(p+2)(p-1)^2}.$$

4.5. Двумя способами (используя метод неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов) найти оригинал функции

$$F(p)=\frac{2p+3}{(p-1)(p^2+4)}.$$

$$\frac{2p+3}{(p-1)(p^2+4)}=\frac{A}{(p-1)}+\frac{Mp+N}{(p^2+4)}$$

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение №5

Задание

Найти решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = e^t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1	Считая неизвестную функцию $y(t)$ и правую часть $f(t)$ уравнения оригиналами, перейти от данного уравнения, связывающего оригиналы, к операторному уравнению, связывающему их изображения $Y = Y(p)$ и $F = F(p)$. Для этого воспользоваться теоремой о дифференцировании оригинала и таблицей соответствия.	По формуле 21 с $n = 2$ получаем $y'' \doteqdot p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y + p$; по формуле 20 имеем $y' \doteqdot pY - y(0) = pY + 1$; в силу формулы 2 таблицы $e^t \doteqdot \frac{1}{p-1}$. Поэтому операторным уравнением, соответствующим данному, является уравнение $p^2Y + p + pY + 1 - 2Y = \frac{1}{p-1}$ или $(p^2 + p - 2)Y + p + 1 = \frac{1}{p-1}$.
2	Решить полученное алгебраическое уравнение относительно неизвестного изображения $Y = Y(p)$.	Полученное уравнение является линейным уравнением первого порядка. Преобразуем его к виду $(p^2 + p + -2)Y = \frac{1}{p-1} - p - 1 =$ $= \frac{1 - p^2 + p - p + 1}{p-1} = \frac{-p^2 + 2}{p-1}$,

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		откуда $Y = \dfrac{-p^2+2}{(p-1)(p^2+p-2)}$.
3	Перейти от изображения $Y(p)$ к оригиналу $y(t)$ и получить искомое решение дифференциального уравнения.	Уравнение $p^2+p-2=0$ имеет решения 1 и –2. Поэтому $p^2+p-2=(p-1)(p+2)$ и $Y = \dfrac{-p^2+2}{(p-1)^2(p+2)}$. Для отыскания оригинала $y(t)$ можно применить любой из известных методов. Воспользуемся, например, методом неопределенных коэффициентов. Имеем $\dfrac{-p^2+2}{(p-1)^2(p+2)} = \dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{(p-1)^2}+\dfrac{C}{p+2} = \dfrac{A(p-1)(p+2)+B(p+2)+C(p-1)^2}{(p-1)^2(p+2)}$, откуда $-p^2+2=A(p-1)(p+2)+B(p+2)+C(p-1)^2$. При $p=1$ получаем $1=3B$, т.е. $B=1/3$; при $p=-2$ будет $-2=C9$, т.е. $C=-2/9$. Сравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, получим $-1=A+C$, т.е. $A=-1-C=-7/9$.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		Итак, $Y=\frac{-p^2+2}{(p-1)^2(p+2)}=$ $=-\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{p-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{p+2}$. Пользуясь формулой 2 таблицы и формулой 10 с $a=1, n=1$, получаем $y(t)=-\frac{7}{9}e^t+\frac{1}{3}te^t-\frac{2}{9}e^{-2t}$ или $y(t)=-\frac{7}{9}e^t-\frac{2}{9}e^{-2t}+\frac{1}{3}te^t$

Решите самостоятельно:

5.1. Найти решение дифференциального уравнения $y''+y'-2y=e^{-t}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=-1, y'(0)=0$.

5.2. Найти решение дифференциального уравнения $y'' + y = 6e^{-t}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3, y'(0) = 1$.

5.3. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 12e^{3t}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2, y'(0) = 6$.

5.4. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' - 3y = 2t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

5.5. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - 9y = \sin t - \cos t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -3,\ y'(0) = 2$.

Примеры отработки решения задач

1. Ряды

Данной теме посвящена глава 1 тематического обзора, где изложен теоретический материал и решены задачи и примеры. Поэтому перед решением примеров следует изучить материал главы 1.

Пример 1. Найти разложение функции $f(z)=\left(\dfrac{e^{z^2}-1}{z}\right)'$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$ и указать круг сходимости.

Р е ш е н и е. 1) Найдем вначале разложение функции $\dfrac{e^{z^2}-1}{z}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=0$. Для этого воспользуемся известным разложением функции e^z (формула (4.11)):

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\ |z|<\infty. \qquad (1)$$

Подставляя z^2 вместо z и вычитая 1, имеем

$$e^{z^2}-1=z^2+\frac{z^4}{2!}+\ldots+\frac{z^{2n}}{n!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}.$$

Полученный ряд, как и исходный, будет сходиться при всех $z\in C$. Разделим обе части равенства на z:

$$\frac{e^{z^2}-1}{z}=z+\frac{z^3}{2!}+\ldots+\frac{z^{2n-1}}{n!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{n!}. \qquad (2)$$

Этот ряд сходится при всех $z\in C$ (включая точку $z_0=0$) и, следовательно, определяет аналитическую в C функцию. Согласно свойству 3.8, его можно почленно дифференцировать.

2. Продифференцируем обе части равенства по переменной z:

$$\left(\frac{e^{z^2}-1}{z}\right)' = 1+\frac{z^2}{3\cdot 2!}+\ldots+\frac{z^{2n-2}}{(2n-1)n!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-2}}{(2n-1)n!};$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-2}}{(2n-1)n!}.$$

В силу свойства 3.8 полученный ряд имеет тот же круг сходимости, что и ряд (2), т.е. $|z|<\infty$.

Пример 2. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z-6}{(z+2)(z-5)}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0=3$ и указать круг сходимости полученного ряда.

Решение. 1. Сделаем замену переменной: $w=z-z_0=z-3$, откуда $z=w+3$. Тогда

$$\frac{z-6}{(z+2)(z-5)}=\frac{w-3}{(w+5)(w-2)}.$$

2. Разложим полученную дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{w-3}{(w+5)(w-2)}=\frac{A}{w+5}+\frac{B}{w-2}=\frac{A(w-2)+B(w+5)}{(w+5)(w-2)}.$$

Следовательно, $w-3=A(w-2)+B(w+5)$.

При $w=2$ имеем $2-3=B(2+5)$, т.е. $B=-1/7$.

При $w=-5$ имеем $-5-3=A(-5-2)$, т.е. $A=8/7$. Таким образом,

$$\frac{w-3}{(w+5)(w-2)}=\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{w+5}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{w-2}.$$

3. Каждую из полученных дробей разложим в ряд по степеням переменной w, используя равенство (4.14):

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-\ldots+(-1)^n z^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n,\ |z|<1. \qquad (3)$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, преобразуем первую дробь, вынеся в знаменателе за скобки множитель 5:

$$\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{w+5}=\frac{8}{7\cdot 5}\cdot\frac{1}{1+w/5}.$$

Подставляя в (3) $w/5$ вместо z, получим

$$\frac{8}{7}\cdot\frac{1}{w+5}=\frac{8}{7\cdot 5}\left(1-\frac{w}{5}+\frac{w^2}{5^2}-\ldots+(-1)^n\frac{w^n}{5^n}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 8}{7\cdot 5^{n+1}}w^n.$$

Так как ряд (3) сходится при $|z|<1$, то полученный ряд будет сходиться при $|w/5|<1$, т.е. $|w|<5$.

Аналогично раскладываем вторую дробь. Для этого выносим за скобки –2:

$$-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{w-2}=\frac{1}{7\cdot 2}\cdot\frac{1}{1-w/2};$$

подставляем в (3) $w/2$ вместо z:

$$-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{w-2}=\frac{1}{7\cdot 2}\left(1+\frac{w}{2}+\frac{w^2}{2^2}+\ldots+\frac{w^n}{2^n}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7\cdot 2^{n+1}}w^n.$$

Здесь кругом сходимости будет $|w/2|<1$, т.е. $|w|<2$.

Складывая полученные разложения, имеем

$$\frac{w-3}{(w+5)(w-2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 8}{7\cdot 5^{n+1}}w^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7\cdot 2^{n+1}}w^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7}\left(\frac{(-1)^n 8}{5^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)w^n,$$

причем ряд сходится в наименьшем из кругов $|w|<5$, $|w|<2$, т.е. в круге $|w|<2$.

4. Возвращаясь к переменному z, подставляем $w=z-3$ и получаем искомое разложение:

$$f(z)=\frac{z-6}{(z+2)(z-5)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7}\left(\frac{(-1)^n 8}{5^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-3)^n,\ |z-3|<2.$$

(Заметим, что круг сходимости ряда Тейлора можно найти сразу,

пользуясь тем фактом, что радиус сходимости R равен расстоянию от z_0 до ближайшей к z_0 особой точки функции $f(z)$. В нашем случае $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=-2$ и $z_2=5$; ближайшей к $z_0=3$ является z_2, и $R=5-3=2$.)

Пример 3. Найти все лорановские разложения функции $f(z)=\dfrac{z-2}{(z+1)(z-3)}$ по степеням $z-3$.

Решение. 1. Сделаем замену переменной: $w=z-3$, т.е. $z=w+3$. Тогда

$$\frac{z-2}{(z+1)(z-3)}=\frac{w+1}{(w+4)w}=g(w).$$

2. Разложим полученную дробь в сумму простейших дробей:

$$\frac{w+1}{(w+4)w}=\frac{A}{w}+\frac{B}{w+4}=\frac{A(w+4)+Bw}{w(w+4)},$$

откуда $w+1=A(w+4)+Bw$.

При $w=0$ имеем $1=4A$, т.е. $A=1/4$;

при $w=-4$ имеем $-3=-4B$, т.е. $B=3/4$. Таким образом,

$$g(w)=\frac{w+1}{w(w+4)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{w}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{w+4}.$$

3. Функция $g(w)$ имеет особые точки $w=0$, $w=-4$, следовательно, аналитична в кольцах $V_1=\{0<|w|<4\}$ и $V_2=\{4<|w|<\infty\}$. Найдем лорановские разложения в каждом из этих колец. Для этого надо разложить дробь $\dfrac{1}{w+4}$ в ряд по степеням переменной w, пользуясь формулой (3).

В случае $0<|w|<4$ выносим за скобки в знаменателе множитель 4:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{w+4}=\frac{3}{4\cdot 4}\cdot\frac{1}{1+w/4}=\frac{3}{4^2}\left(1-\frac{w}{4}+\frac{w^2}{4^2}-\ldots+(-1)^n\frac{w^n}{4^n}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3}{4^{n+2}}w^n$$

(мы подставили в (3) $w/4$ вместо z). Так как ряд (3) сходится при $|z|<1$, то полученный ряд сходится при $|w|<4$. Итак, при $w\in V_1$

$$g(w)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{w}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 3}{4^{n+2}}w^n,\ 0<|w|<4.$$

При $|w|>4$ полученный ряд расходится. Поэтому для разложения функции $g(w)$ в кольце V_2 вынесем за скобки в знаменателе дроби $\frac{1}{w+4}$ множитель w: $\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{w+4}=\frac{3}{4w}\cdot\frac{1}{1+4/w}$. Если $|w|>4$, то $\left|\frac{4}{w}\right|<1$. Поэтому можно подставить в (3) $4/w$ вместо z:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{w+4}=\frac{3}{4w}\left(1-\frac{4}{w}+\frac{4^2}{w^2}-\ldots+(-1)^n\frac{4^n}{w^n}+\ldots\right)=\frac{3}{4w}-\frac{3}{w^2}+\frac{3\cdot 4}{w^3}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{3\cdot 4^{n-1}}{w^{n+1}}+\ldots=\frac{3}{4w}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3\cdot 4^{n-1}w^{-n-1}=$$

$$=\frac{3}{4w}+\sum_{k=-2}^{-\infty}(-1)^{k+1}\cdot\frac{3}{4^{k+2}}w^k$$

(мы сделали замену $k=-n-1$, откуда $n=-k-1$, $(-1)^n=(-1)^{-k-1}=$ $=(-1)^{k+1}$). Таким образом, при $w\in V_2$

$$g(w)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{w}+\frac{3}{4w}+\sum_{k=-2}^{-\infty}(-1)^{k+1}\frac{3}{4^{k+2}}w^k=\frac{1}{w}+\sum_{k=-2}^{-\infty}(-1)^{k+1}\frac{3}{4^{k+2}}w^k.$$

4. Возвращаемся к переменной z, подставляя $w=z-3$. Искомыми

разложениями функции $f(z)$ будут:

$$f(z)=\frac{1}{4(z-3)}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{4^{n+2}}(z-3)^n,\ 0<|z-3|<4;$$

$$f(z)=\frac{1}{z-3}+\sum_{k=-2}^{-\infty}(-1)^{k+1}\frac{3}{4^{k+2}}(z-3)^k,\ 4<|z-3|<\infty.$$

2. Изолированные особые точки и теория вычетов

Теоретический материал, необходимый для решения задач данного раздела, изложен в главе 2 тематического обзора. Следует прочесть эту главу перед решением задач.

Пример 4. Найти разложение функции $f(z)=(z+2)^2e^{\frac{z}{z+2}}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0=-2$. Указать кольцо сходимости, правильную и главную части разложения, а также тип особой точки z_0.

Решение. 1. Сделаем замену переменной $w=z+2$. Тогда $z=w-2$,

$$f(z)=(z+2)^2e^{\frac{z}{z+2}}=w^2e^{\frac{w-2}{w}}=w^2e^{1-\frac{2}{w}}=ew^2e^{-\frac{2}{w}}.$$

2. Воспользуемся известным разложением функции e^z – формулой (1), в которую подставим $-2/w$ вместо z:

$$ew^2e^{-\frac{2}{w}}=ew^2\left(1-\frac{2}{w}+\frac{1}{2!}\frac{2^2}{w^2}-\frac{1}{3!}\frac{2^3}{w^3}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n!}\frac{2^n}{w^n}+\ldots\right)=$$

$$=ew^2-2ew+2e-\frac{2^3e}{3!w}+\ldots+\frac{(-1)^n2^ne}{n!w^{n-2}}+\ldots=$$

$$=ew^2-2ew+2e+\sum_{k=+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k2^{k+2}e}{(k+2)!}w^{-k}$$

(в последнем равенстве мы сделали замену $k=n-2$, т.е. $n=k+2$).

Так как ряд (1) сходится при $|z|<\infty$, то полученный ряд сходится

при $|-2/w|<\infty$, т.е. $|w|>0$, или $w\neq 0$.

3. Возвращаемся к переменной z, подставляя $w=z+2$. Получаем искомое разложение функции $f(z)$:

$$f(z)=e(z+2)^2-2e(z+2)+2e+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k e\cdot 2^{k+2}}{(k+2)!}(z+2)^{-k},\ z\neq -2.$$

Правильной частью является сумма $e(z+2)^2-2e(z+2)+2e$, главной частью – ряд $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k e\cdot 2^{k+2}}{(k+2)!}(z+2)^{-k}$. Поскольку главная часть имеет бесконечно много отличных от нуля коэффициентов, то $z_0=-2$ является существенно особой точкой.

Пример 5. Определить тип особой точки $z_0=0$ функции $f(z)=\dfrac{\cos z-1+z^2}{e^{z^3}-1-z^3}$.

Р е ш е н и е. Разложим числитель и знаменатель в ряд Тейлора по степеням z. Для этого используем известное разложение функции $\cos z$:

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ z\in C.\quad (4)$$

(формула (4.13) тематического обзора). Из (4) вытекает равенство:

$$\cos z-1+z^2=z^2-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots=z^2\left(\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}+\ldots\right),$$

причем ряды сходятся во всей комплексной плоскости.

Для разложения знаменателя $e^{z^3}-1-z^3$ воспользуемся формулой (1), в которую подставим z^3 вместо z и вычтем $1+z^3$:

$$e^{z^3}-1-z^3=1+z^3-1-z^3+\frac{(z^3)^2}{2!}+\frac{(z^3)^3}{3!}+\ldots=z^6\left(\frac{1}{2}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right);$$

полученный ряд (как и ряд в (1)) сходится при всех $z\in C$. Отсюда

$$f(z)=\frac{\cos z-1+z^2}{e^{z^3}-1-z^3}=\frac{z^2\left(\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}+\ldots\right)}{z^6\left(\frac{1}{2}+\frac{z^3}{3!}+\ldots\right)}=\frac{1}{z^4}\cdot h(z),$$

где $h(z)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{z^2}{4!}-\frac{z^4}{6!}+\ldots}{\frac{1}{2}+\frac{z^3}{3!}+\ldots}$.

Функция $h(z)$ имеет вид $h(z)=\dfrac{f_1(z)}{f_2(z)}$, где функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в комплексной плоскости C и $f_2(0)=\dfrac{1}{2}\neq 0$. Поэтому функция $h(z)$ также аналитична в некоторой окрестности точки $z_0=0$, причем $h(0)=1\neq 0$. Так как $f(z)=\dfrac{h(z)}{z^4}$, то согласно следствию 7.4 точка $z_0=0$ является полюсом порядка $N=4$.

Пример 6. Найти все изолированные особые точки функции $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{(z^2+9)^2}$ и определить их тип.

Р е ш е н и е. Конечными особыми точками являются $z_1=0$, а также точки, в которых $z^2+9=0$, т.е. $z_2=3i$, $z_3=-3i$. Поэтому особая точка $z_4=\infty$ тоже является изолированной, так как найдется окрестность $|z|>R$, не содержащая других особых точек.

Рассмотрим точку $z_1=0$. Пусть точки z_n' таковы, что $\dfrac{1}{z_n'}=\pi n$, т.е.

$z_n' = \dfrac{1}{\pi n}$, $n = 1,2,\ldots$. Тогда $f(z_n') = 0$. Через z_n'' обозначим точки, для которых $\dfrac{1}{z_n''} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, т.е. $z_n'' = \dfrac{2}{\pi + 4\pi n}$. При этом $\sin\dfrac{1}{z_n''} = 1$, $n = 1,2,\ldots$.

Легко видеть, что $z_n' \to 0$ и $z_n'' \to 0$ при $n \to \infty$. В то же время пределы

$\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n') = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n'') = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{((z_n'')^2 + 9)^2} = \dfrac{1}{9^2}$ различны.

Следовательно, функция $f(z)$ не имеет предела при $z \to 0$. Поэтому точка $z_1 = 0$ является существенно особой.

Для рассмотрения точек z_2 и z_3 разложим знаменатель на множители. Так как $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)$, то

$$f(z) = \frac{\sin\dfrac{1}{z}}{(z-3i)^2(z+3i)^2} = \frac{h(z)}{(z-3i)^2}, \text{ где } h(z) = \frac{\sin\dfrac{1}{z}}{(z+3i)^2}.$$

Поскольку функция $h(z)$ аналитична в окрестности точки $z_2 = 3i$ и $h(3i) = \dfrac{\sin(1/3i)}{(6i)^2} \neq 0$, то в силу следствия 7.4 точка $z_2 = 3i$ является полюсом второго порядка. Аналогично доказывается, что $z_3 = -3i$ – тоже полюс второго порядка.

Осталось рассмотреть точку $z_4 = \infty$. Это можно сделать двумя способами: либо перейти к переменной $w = 1/z$ и исследовать особую точку $w_0 = 0$ функции $G(w) = f\left(\dfrac{1}{w}\right)$ (см. пример 7.11 в тематическом обзоре), либо непосредственно вычислить предел $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ (или доказать, что этот предел не существует). В данном случае указанный предел легко вычисляется, поэтому второй способ проще.

Действительно, $1/z \to 0$ при $z \to \infty$, поэтому и $\sin\dfrac{1}{z} \to 0$ при $z \to \infty$.

Очевидно, $(z^2+9)^2 \to \infty$ при $z \to \infty$. Следовательно,

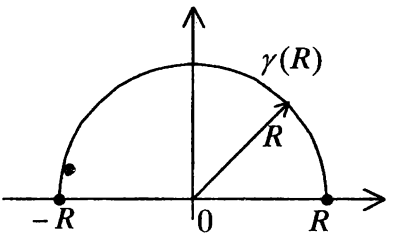
$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{\sin(1/z)}{(z^2+9)^2} = 0.$$

Так как функция $f(z)$ имеет конечный предел при $z \to \infty$, то $z_4 = \infty$ – устранимая особая точка (здесь несущественно, что предел равен нулю; важно, что он является конечным числом). Если положить $f(\infty) = 0$, то $f(z)$ станет аналитической в точке ∞.

Пример 7. Вычислить несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-4)dx}{(x^2+6x+13)(x^2+16)}.$$

Р е ш е н и е . Как и в теореме 9.4 тематического обзора, рассмотрим замкнутый контур, состоящий из отрезка $[-R,R]$ действительной оси и полуокружности $\gamma(R)$ радиуса R, лежащей в верхней полуплоскости. Возьмем функцию



$$f(z) = \frac{z^2-4}{(z^2+6z+13)(z^2+16)},$$

которая получается, если переменную x в подынтегральном выражении заменить на z. Покажем, что

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma(R)} f(z)dz = 0 \qquad (5)$$

(т.е. что выполнено условие (9.3) теоремы 9.4). Действительно,

$$f(z) = \frac{z^2\left(1-\dfrac{4}{z^2}\right)}{z^2\left(1+\dfrac{6}{z}+\dfrac{13}{z^2}\right)z^2\left(1+\dfrac{16}{z^2}\right)} = \frac{1-\dfrac{4}{z^2}}{z^2\left(1+\dfrac{6}{z}+\dfrac{13}{z^2}\right)\left(1+\dfrac{16}{z^2}\right)} = \frac{1}{z^2}\cdot h(z),$$

где $h(z)=\dfrac{1-\dfrac{4}{z^2}}{\left(1+\dfrac{6}{z}+\dfrac{13}{z^2}\right)\left(1+\dfrac{16}{z^2}\right)}$. Так как $h(z)\to 1$ при $z\to\infty$, то при достаточно больших значениях z имеем $|h(z)|<2$. Поэтому $|f(z)|=\dfrac{|h(z)|}{|z|^2}<\dfrac{2}{|z|^2}$. Следовательно, при достаточно больших R

$$\left|\int_{\gamma(R)} f(z)dz\right| \le \int_{\gamma(R)} |f(z)|\cdot|dz| \le \int_{\gamma(R)} \frac{2}{R^2}|dz| = \frac{2}{R^2}\cdot \pi R = \frac{2\pi}{R}.$$

Переходя к пределу при $R\to\infty$, получаем (5). (Заметим, что мы уже проводили аналогичные рассуждения в примере 9.5.)

В силу теоремы 9.4 интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ равен сумме вычетов функции $f(z)$ в особых точках, лежащих в верхней полуплоскости, умноженной на $2\pi i$. В нашем случае особыми точками будут точки, в которых знаменатель обращается в нуль, т.е. $z^2+6z+13=0$, откуда $z_{1,2}=-3\pm 2i$, и $z^2+16=0$, откуда $z_{3,4}=\pm 4i$. Из этих точек в верхней полуплоскости лежат только $z_1=-3+2i$ и $z_3=4i$. Так как

$$f(z)=\frac{z^2-4}{(z+3-2i)(z+3+2i)(z-4i)(z+4i)},$$

то в силу следствия 7.4 каждая особая точка является полюсом первого порядка. Вычеты в точках z_1 и z_3 найдем по формуле

$$res_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \qquad (6)$$

(формула (8.5) тематического обзора). Имеем:

$$res_{-3+2i} f = \lim_{z\to -3+2i} \frac{(z+3-2i)(z^2-4)}{(z+3-2i)(z+3+2i)(z^2+16)} =$$

$$= \lim_{z\to -3+2i} \frac{z^2-4}{(z+3+2i)(z^2+16)} = \frac{(-3+2i)^2-4}{4i((-3+2i)^2+16)} = \frac{9-12i-4-4}{4i(9-12i-4+16)} =$$

$$= \frac{1-12i}{12i(7-4i)} = \frac{11-16i}{12\cdot 13i};$$

$$res_{4i} f = \lim_{z\to 4i} \frac{(z-4i)(z^2-4)}{(z^2+6z+13)(z-4i)(z+4i)} =$$

$$= \lim_{z\to 4i} \frac{z^2-4}{(z^2+6z+13)(z+4i)} = \frac{(4i)^2-4}{((4i)^2+24i+13)8i} = \frac{-20}{(-3+24i)8i} =$$

$$= \frac{-5}{6i(-1+8i)} = \frac{1+8i}{6\cdot 13i}.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2-4)dx}{(x^2+6x+13)(x^2+16)} = 2\pi i(res_{-3+2i} f + res_{4i} f) =$$

$$= 2\pi i\left(\frac{11-16i}{12\cdot 13i} + \frac{1+8i}{6\cdot 13i}\right) = \frac{\pi}{6\cdot 13}(11-16i+2+16i) = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 8. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t}$.

Решение. Сделаем замену переменной, положив $z = e^{it}$. Тогда $dz = e^{it} idt = zidt$, откуда $dt = \frac{dz}{zi} = -\frac{idz}{z}$, $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$.

При изменении t от 0 до 2π точка $z = e^{it}$ описывает окружность $|z| = 1$. Переходя в данном интеграле к переменной z, получаем

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{5-\sqrt{21}\sin t}=-\int_{|z|=1}\frac{idz}{z\left(5-\sqrt{21}\cdot\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)}=\int_{|z|=1}\frac{2dz}{-\sqrt{21}z^2+10iz+\sqrt{21}}.$$

Полученный интеграл вычислим с помощью вычетов. Вначале найдем особые точки функции $f(z)=\dfrac{2}{-\sqrt{21}z^2+10iz+\sqrt{21}}$, приравнивая знаменатель к нулю: $-\sqrt{21}z^2+10iz+\sqrt{21}=0$. По обычной формуле для корней квадратного уравнения имеем $D=(10i)^2-$ $-4\cdot(-\sqrt{21})\cdot\sqrt{21}=-16$, $z_1=\dfrac{3i}{\sqrt{21}}$, $z_2=\dfrac{7i}{\sqrt{21}}$. Из этих точек только z_1 лежит внутри окружности $|z|=1$, поскольку $|z_2|=\dfrac{7}{\sqrt{21}}>1$. Так как функция $f(z)$ представима в виде

$$f(z)=\frac{2}{-\sqrt{21}\left(z-\frac{3i}{\sqrt{21}}\right)\left(z-\frac{7i}{\sqrt{21}}\right)},$$

то обе особые точки z_1 и z_2 – полюсы первого порядка.

Найдем теперь вычет в точке z_1 по формуле (6):

$$res_{z_1}f=\lim_{z\to 3i/\sqrt{21}}\frac{(z-3i/\sqrt{21})2}{-\sqrt{21}(z-3i/\sqrt{21})(z-7i/\sqrt{21})}=\lim_{z\to 3i/\sqrt{21}}\frac{2}{7i-\sqrt{21}z}=$$

$$=\frac{2}{7i-3i}=\frac{1}{2i}.$$

Используя основную теорему о вычетах, получаем

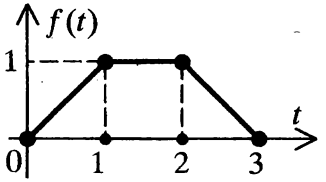
$$\int_{|z|=1}f(z)dz=2\pi i\cdot res_{z_1}f=2\pi i\frac{1}{2i}=\pi.$$

Таким образом, исходный интеграл равен π.

3. Основы операционного исчисления

Перед тем, как решать следующие далее задачи, необходимо изучить теоретический материал, изложенный в главе 3, и разобрать приведенные в этой главе примеры.

Пример 9. По данному графику оригинала $f(t)$ найти изображение.



Решение. 1. Найдем изображения более простых оригиналов, из которых затем составим заданный оригинал $f(t)$. Обозначим

$$f_1(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1\\ 0, & t>0\end{cases},\quad f_2(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le 1\\ 0, & t>0\end{cases}.$$

Изображение функции $f_2(t)$ найдем непосредственно по формуле

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt, \qquad (7)$$

определяющей преобразование Лапласа. Если $F_1(p)\doteqdot f_1(t)$, $F_2(p)\doteqdot f_2(t)$, то

$$F_2(p)=\int_0^1 e^{-pt}dt=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^1=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p}.$$

Изображение $F_2(p)$ тоже можно найти по формуле (7), интегрируя по частям. Но можно поступить иначе: заметить, что $f_1(t)=tf_2(t)$, и воспользоваться теоремой о дифференцировании изображения

$$-tf(t)\doteqdot F'(p)$$

(формула 23 таблицы), согласно которой

$$f_1(t)=tf_2(t)\doteqdot -F_2'(p)=-\left(\frac{1}{p}(1-e^{-p})\right)'=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}e^{-p}-\frac{1}{p}e^{-p}.$$

Итак,

$$F_1(p)=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}e^{-p}-\frac{1}{p}e^{-p}.$$

2. Выразим заданный оригинал $f(t)$ через $f_1(t)$ и $f_2(t)$. Очевидно, $f(t)=f_1(t)$ при $0\le t\le 1$. На участке $[1;2]$ $f(t)$ совпадает с $f_2(t)$, сдвинутой на 1 вправо, т.е. $f(t)=f_2(t-1)$, $1\le t\le 2$. При $2\le t\le 3$ функцию $f(t)$ можно получить, если сдвинуть $f_1(t)$ на 2 единицы вправо, отразить симметрично относительно оси t (т.е. умножить на –1) и поднять на 1 вверх. Таким образом, $f(t)=-f_1(t-2)+f_2(t-2)$, $2\le t\le 3$. Итак,

$$f(t)=f_1(t)+f_2(t-1)-f_1(t-2)+f_2(t-2);\ t\ge 0.$$

Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и теоремой запаздывания (формула 18 таблицы), получаем

$$f(t)\ \ F(p)=F_1(p)+e^{-p}F_2(p)-e^{-2p}F_1(p)+e^{-2p}F_2(p)=$$

$$=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}e^{-p}-\frac{1}{p}e^{-p}+\frac{1}{p}e^{-p}-\frac{1}{p}e^{-2p}-\frac{1}{p^2}e^{-2p}+\frac{1}{p^2}e^{-3p}+\frac{1}{p}e^{-3p}+$$

$$+\frac{1}{p}e^{-2p}-\frac{1}{p}e^{-3p}=\frac{1}{p^2}(1-e^{-p}-e^{-2p}+e^{-3p}).$$

К этому же результату можно прийти, непосредственно применяя формулу (7). Для этого следует задать функцию $f(t)$ аналитически и проинтегрировать на каждом из трех участков в отдельности. Такой путь приводит к существенно более громоздким вычислениям.

Пример 10. Найти оригинал изображения $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+4p+13)^2}$ и сделать проверку, найдя изображение полученного оригинала.

Р е ш е н и е. 1. Разложим функцию $F(p)$ на множители, оригиналы которых известны:

$$F(p)=\frac{1}{p^2+4p+13}\cdot\frac{1}{p^2+4p+13}=\frac{1}{(p+2)^2+3^2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+3^2}.$$

По формуле 7 таблицы с $a=-2,\omega=3$ получаем

$$e^{-2t}\sin 3t\doteq\frac{3}{(p+2)^2+3^2},\ \text{откуда}\ \frac{1}{(p+2)^2+3^2}\doteq\frac{1}{3}e^{-2t}\sin 3t.$$

Согласно теореме умножения изображений (формула 25 таблицы),

произведению изображений соответствует свертка оригиналов сомножителей. Поэтому

$$F(p)=\frac{1}{(p+2)^2+3^2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+3^2}\doteq\int_0^t\frac{1}{3}e^{-2\tau}\sin 3\tau\cdot\frac{1}{3}e^{-2(t-\tau)}\sin 3(t-\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{9}e^{-2t}\int_0^t\sin 3\tau\cdot\sin(3t-3\tau)d\tau=\frac{1}{18}e^{-2t}\int_0^t(\cos(6\tau-3t)-\cos 3t)d\tau.$$

Вначале мы вынесли постоянный множитель $\frac{1}{9}e^{-2t}$ за знак интеграла, а затем воспользовались формулой $\sin\alpha\sin\beta=$ $=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$. Вычисляя последний интеграл, имеем

$$F(p)\doteq\frac{1}{18}e^{-2t}\left(\int_0^t\cos(6\tau-3t)d\tau-\int_0^t\cos 3td\tau\right)=$$

$$=\frac{1}{18}e^{-2t}\left(\frac{1}{6}\sin(6\tau-3t)\Big|_0^t-\tau\cos 3t\Big|_0^t\right)=\frac{1}{18}e^{-2t}\left(\frac{1}{6}\sin 3t+\frac{1}{6}\sin 3t-t\cos 3t\right)=$$

$$=\frac{1}{18}e^{-2t}\left(\frac{1}{3}\sin 3t-t\cos 3t\right).$$

Итак, $F(p)\doteq f(t)=\frac{1}{18}e^{-2t}\left(\frac{1}{3}\sin 3t-t\cos 3t\right)$.

Полученный результат легко проверить, найдя изображение функции $f(t)$. Действительно, по формуле 8 таблицы $e^{-2t}\sin 3t\doteq\frac{3}{(p+2)^2+3^2}$, а по формуле 12 $t\cos 3t\doteq\frac{p^2-3^2}{(p^2+3^2)^2}$. Отсюда и из формулы 19 таблицы следует, что $e^{-2t}t\cos 3t\doteq\frac{(p+2)^2-3^2}{((p+2)^2+3^2)^2}$. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа, имеем

$$f(t)=\frac{1}{18\cdot 3}e^{-2t}\sin 3t-\frac{1}{18}e^{-2t}t\cos 3t \doteqdot \frac{1}{18\cdot 3}\cdot\frac{3}{(p+2)^2+9}-$$

$$-\frac{1}{18}\cdot\frac{(p+2)^2-9}{((p+2)^2+9)^2}=\frac{1}{18}\cdot\frac{(p+2)^2+9-((p+2)^2-9)}{((p+2)^2+9)^2}=$$

$$=\frac{1}{18}\frac{18}{((p+2)^2+9)^2}=\frac{1}{(p^2+4p+13)^2},$$

что совпадает с исходным изображением.

Пример 11. Используя интеграл Дюамеля, найти решение дифференциального уравнения

$$y''+4y'+4y=\frac{e^{-2t}}{t^2+1},$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=0,\ y'(0)=0$.

Р е ш е н и е . Отметим, что применение интеграла Дюамеля в данном случае вызвано, в частности, тем, что таблица не содержит изображения правой части уравнения. Решение состоит из следующих двух этапов.

1. Найдем решение $y_1(t)$ уравнения

$$y''+4y'+4y=1$$

с той же левой частью, что у заданного уравнения, и также при нулевых начальных условиях: $y_1(0)=0, y_1'(0)=0$. С этой целью перейдем к операторному уравнению, пользуясь тем, что $y_1' \doteqdot pY_1(p)$, $y_1'' \doteqdot p^2Y_1(p)$, $1 \doteqdot \frac{1}{p}$ (здесь $Y_1(p)$ – изображение функции $y_1(t)$):

$$p^2Y_1+4pY_1+4Y_1=\frac{1}{p}, \text{ или } (p^2+4p+4)Y_1=\frac{1}{p}.$$

Отсюда $Y_1=\dfrac{1}{p(p^2+4p+4)}=\dfrac{1}{p(p+2)^2}$.

Разложение полученной дроби в сумму простейших дробей имеет вид

$$\frac{1}{p(p+2)^2}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+2}+\frac{C}{(p+2)^2}=\frac{A(p+2)^2+Bp(p+2)+Cp}{p(p+2)^2}.$$

Следовательно, $1=A(p+2)^2+Bp(p+2)+Cp$.

При $p=0$ имеем $1=4A$, т.е. $A=1/4$; при $p=-2$ будет $1=-2C$, т.е. $C=-1/2$. Сравнивая коэффициенты при p^2 в левой и правой частях равенства, получим $0=A+B$, т.е. $B=-A=-1/4$. Итак,

$$Y_1=\frac{1}{p(p+2)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2}.$$

Пользуясь формулами 1, 2 и 10 таблицы с $n=1$, имеем

$$y_1(t)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}e^{-2t}-\frac{1}{2}te^{-2t}.$$

Заметим, что найти $y_1(t)$ можно также методом неопределенных коэффициентов, изучаемом в курсе дифференциальных уравнений.

2. Найдем решение исходного уравнения по формуле

$$y(t)=\int_0^t f(\tau)y_1'(t-\tau)d\tau,$$

где $f(t)$ – правая часть исходного уравнения (формула (13.12) тематического обзора). Имеем

$$y_1'(t)=-\frac{1}{4}\cdot(-2)e^{-2t}-\frac{1}{2}(e^{-2t}+t\cdot(-2)e^{-2t})=e^{-2t}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+t\right)=te^{-2t};$$

$$y(t)=\int_0^t\frac{e^{-2\tau}}{\tau^2+1}(t-\tau)e^{-2(t-\tau)}d\tau=e^{-2t}\int_0^t\frac{t-\tau}{\tau^2+1}d\tau=$$

$$=e^{-2t}\left(\int_0^t\frac{t}{\tau^2+1}d\tau-\int_0^t\frac{\tau}{\tau^2+1}d\tau\right)=e^{-2t}(t\operatorname{arctg}\tau\Big|_0^t-\frac{1}{2}\ln(\tau^2+1)\Big|_0^t=$$

$$=e^{-2t}(t\operatorname{arctg}t-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)).$$

Итак, $y(t) = e^{-2t}(t\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\ln(t^2+1))$.

Пример 12. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x + 3y + 2 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$$

при начальных условиях $x(0) = -1,\ y(0) = 2$.

Решение. 1. Обозначим через X и Y изображения неизвестных функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа и формулами 20 и 1 таблицы, перейдем к операторным уравнениям:

$$\begin{cases} pX - (-1) = X + 3Y + \dfrac{2}{p} \\ pY - 2 = X - Y + \dfrac{1}{p} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (p-1)X - 3Y = \dfrac{2}{p} - 1 \\ -X + (p+1)Y = \dfrac{1}{p} + 2. \end{cases}$$

2. Решим полученную систему линейных уравнений относительно X и Y. Для этого выразим X из второго уравнения и подставим в первое:

$$X = (p+1)Y - \frac{1}{p} - 2;\ (p-1)\left((p+1)Y - \frac{1}{p} - 2\right) - 3Y = \frac{2}{p} - 1.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов приходим к равенству $(p^2-4)Y = \dfrac{1}{p} + 2p - 2$ или $(p^2-4)Y = \dfrac{2p^2-2p+1}{p}$.

Отсюда:

$$Y = \frac{2p^2-2p+1}{p(p^2-4)};$$

$$X = (p+1)Y - \frac{1}{p} - 2 = \frac{(p+1)(2p^2-2p+1)}{p(p^2-4)} - \frac{1}{p} - 2 =$$

$$= \frac{(p+1)(2p^2-2p+1) - (1+2p)(p^2-4)}{p(p^2-4)}.$$

Раскрывая в числителе скобки и приводя подобные члены, получим

$$X = \frac{-p^2 + 7p + 5}{p(p^2 - 4)}.$$

Для сравнения решим эту систему другим способом, с использованием формул Крамера (см. также пример 13.5 в тематическом обзоре). Из коэффициентов при X и Y составим определитель Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p-1 & -3 \\ -1 & p+1 \end{vmatrix} = (p-1)(p+1) - (-1)(-3) = p^2 - 4.$$

Последовательно заменяя первый и второй столбцы этого определителя столбцом из правых частей уравнений, получим определители Δ_X и Δ_Y:

$$\Delta_X = \begin{vmatrix} \frac{2}{p} - 1 & -3 \\ \frac{1}{p} + 2 & p+1 \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{p} - 1\right)(p+1) - \left(\frac{1}{p} + 2\right)(-3) =$$

$$= \frac{5}{p} - p + 7 = \frac{-p^2 + 7p + 5}{p};$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} p-1 & \frac{2}{p} - 1 \\ -1 & \frac{1}{p} + 2 \end{vmatrix} = (p-1)\left(\frac{1}{p} + 2\right) - (-1)\left(\frac{2}{p} - 1\right) =$$

$$= 2p + \frac{1}{p} - 2 = \frac{2p^2 - 2p + 1}{p}.$$

Формулы Крамера сразу приводят к тому же результату:

$$X = \frac{\Delta_X}{\Delta} = \frac{-p^2 + 7p + 5}{p(p^2 - 4)}; \; Y = \frac{\Delta_Y}{\Delta} = \frac{p^2 - 2p + 1}{p(p^2 - 4)}.$$

Читатель может убедиться, что второй способ требует несколько

меньшего объема вычислений.

3. От полученных изображений X и Y перейдем к их оригиналам x и y.

Сделать это можно двумя способами: методом неопределенных коэффициентов и с помощью вычетов; объем работы при использовании этих методов примерно одинаков. Чтобы напомнить оба приема, мы (как и в примере 13.5) найдем $x(t)$ первым способом, а $y(t)$ – вторым; читателю рекомендуется находить оба оригинала каким-либо одним способом, что более удобно.

Разложение функции X в сумму простейших дробей имеет вид:

$$\frac{-p^2+7p+5}{p(p-2)(p+2)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-2}+\frac{C}{p+2}=$$

$$=\frac{A(p-2)(p+2)+Bp(p+2)+Cp(p-2)}{p(p-2)(p+2)}.$$

Отсюда $-p^2+7p+5=A(p-2)(p+2)+Bp(p+2)+Cp(p-2)$.

При $p=0$ получаем $5=-4A$, откуда $A=-5/4$;

при $p=2$ получаем $-4+14+5=B\cdot 2\cdot 4$, откуда $B=15/8$;

при $p=-2$ получаем $-4-14+5=C(-2)(-4)$, откуда $C=-13/8$.

Следовательно, $X=-\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{p}+\frac{15}{8}\cdot\frac{1}{p-2}-\frac{13}{8}\cdot\frac{1}{p+2}$. По формулам 1 и 2 таблицы и свойству линейности находим оригинал:

$$x(t)=-\frac{5}{4}+\frac{15}{8}e^{2t}-\frac{13}{8}e^{-2t}.$$

Оригинал $y(t)$ найдем по формуле $y(t)=\sum_k res_{p_k}(Y(p)e^{pt})$ (формула (13.8) тематического обзора). Функция

$$Y(p)e^{pt}=\frac{(2p^2-2p+1)e^{pt}}{p(p-2)(p+2)}$$

имеет особые точки 0, 2 и –2, каждая из которых является полюсом первого порядка. Вычеты в этих точках найдем по формуле

$$res_{p_k}\left(Y(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to p_k}(p-p_k)Y(p)e^{pt}$$

(см. формулу (8.5) тематического обзора; можно использовать и (8.6)).

$$res_0\left(Y(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to 0}\frac{p(2p^2-2p+1)e^{pt}}{p(p-2)(p+2)}=\lim_{p\to 0}\frac{(2p^2-2p+1)e^{pt}}{(p-2)(p+2)}=-\frac{1}{4};$$

$$res_2\left(Y(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to 2}\frac{(2p^2-2p+1)e^{pt}}{p(p+2)}=\frac{(8-4+1)e^{2t}}{2\cdot 4\cdot}=\frac{5}{8}e^{2t};$$

$$res_{-2}\left(Y(p)e^{pt}\right)=\lim_{p\to -2}\frac{(2p^2-2p+1)e^{pt}}{p(p-2)}=\frac{(8+4+1)e^{-2t}}{-2\cdot(-4)}=\frac{13}{8}e^{-2t}.$$

Следовательно,

$$y(t)=-\frac{1}{4}+\frac{5}{8}e^{2t}+\frac{13}{8}e^{-2t}.$$

Изд. лиц. ЛР № 071765 от 07.12.1998
Казахстанско-Российский университет
Уч.-изд. л. 14,5 Тираж 373